



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

I L L V S T R I B V S,  
NOBILISS. AMPLISS.Q.  
H O L L A N D I Æ,  
W E S T F R I S I Æ,  
E T  
Z E E L A N D I Æ  
O R D I N I B V S

I O S E P H V S S C A L I G E R  
I V L. C Æ S. F.  
S. D.



QVOD ego, nobilissimi atque amplissimi viri, huc vestris decretis euocatus sim: sentio equidem causam eam non fuisse, ut otiosus elegantiam & amœnitatem urbium vestrarum contemplerer, ac illa quiete, quam omnibus moderatio imperij vestri præstat, ad desidiam abuterer: sed potius (quandoquidem id nos posse facere censuistis) ut publica studia studiis nostris iuuaemus, eiusque rei rationem  
\* 2                    apud

apud vos solos redderemus, ne præsidium, in quo a vobis locati sumus, deserere videamur. Quare permagni mea interesse iudicavi, si quandiu vos me in eo esse voletis, vobis quam creberrime aliquid de nostris studiis delibemus, quod sub nomine vestro lucem pati possit. Quod alacrius facimus, cum vos omnibus iis, qui vobis talia consecrant, humanitatis vestræ potestatem facere, atque omnes in intima comitatus vestræ admittere videam. Nam captare quo tempore interpellimini, vtrum cum in rempublicam incumbitis, an cum ab omni cura vacui estis, id vero frustra esset. Qui enim res eas tractetis, quæ omni tempore sollicitudinem vestram, sine qua incolumes esse non possunt, requirunt, vos, qui eas & incolumes esse vultis, & præstatis, sine sollicitudine nunquam esse existimare debemus. Si igitur molem rerum, quæ prudentia vestra & consilio temperantur, respicio, nequicquam vestras aures & oculos mihi vacare postulo, quibus nullum vnquam

vnquam tempus a negotiis vacat : sin autem  
humanitatem considero , qua tam libenter  
litteras , quam cæteras virtutes amplectimini ,  
qui propositis amplissimis honorariis doctissi-  
mos vndecunque viros in vestram luculen-  
tam Academiam Lugdunensem inuitatis :  
hoc fiduciam mihi facit , non solum vigiliis  
meis , quarum specimen vobis nunc offero ,  
sed etiam mihi ipsi aliquem honorem habi-  
tum iri , non quem illæ meruerunt ( nullum  
enim meruerunt ) sed quem per æquanimi-  
tatem vestram mihi sperare licet : neque vti-  
que propter vllum meritum meum ( quod  
enim facto ego tantos viros demereri pos-  
sim ? ) sed propter iudicia vestra , cum ego  
huc amplissimis vestris decretis venerim , qua-  
si hic mea industria vtilior futura , quam in  
patria mea esset. Ego vero , qui nihil minus  
cogitarem , quam me posse præstare quod pu-  
blicis commodis inseruire posset , nihil ma-  
gis cuperem , quam vt , si quid tale præsta-  
re possem , totum id sepultum , & ignora-  
bile

bile in tanta rerum Gallicarum perturbatione lateret: facile tandem passus sum honesto meo & innocēti otio manus a vobis iniici, tanquam vestro sæculo ob id reseruatus, vt qui non poteram villo studiorum meorum fructu in patria mea, possem hic & vbique vestris iudiciis gloriari. Quod quidem non ad meam solum, sed ad maiorum quoq. meorum amplitudinem, atque gloriam pertinere arbitror, vt vetustissimæ & illustrissimæ nostræ gentis pene vltimus non carerem tantorum virorum testimoniis, quibus ipsi ob benefacta sua & res præclare gestas nunquam caruerunt. Vestra denique tantæ apud me fuit auctoritas, vt cum dulcedo patriæ me cogeret etiam ruinas suas amare, tamen non auulsus ab ea, sed ab eadem huc inuitatus esse videar. Meum igitur est ostendere, non solum quam libenter me persuaderi passus sim, sed etiam operam dare, vt quicunque posthac labores nostros lecturi sint, dicant audacter, se non vanum iudiciorum vestrorum fructum percipere. Quibus fretus, Viri  
nobi-

nobilissimi , atque amplissimi , non veritus sum vobis opus nouum, & materiam vetustissimam offerre . quæ duo non sine causa distinxi: vt quanto magis exiguitas operis me ab illo vobis offerendo deterrere potuerit, tanto impensius magnitudo materiæ ad se & consequenter propter se ad opus quoque ipsum amplectendum vos hortari possit. Mathematica enim non mole, sed bonitate operis, non multitudine, sed felicitate demonstrationum gloriantur: imo nulla alia re magis, quam acuta breuitate commendari solent. Cuius scientiæ tam certa fides est, vt qui ea non abutatur, nunquam operam ludat: qui vero ea violenter vtatur, id quod prisci Antipho, Bryso, Hippocrates Chius, & quod satis mirari non possum, magnus Archimedes, in hac re factitarunt; ille ex demonstrationibus suis nihil aliud consequatur, quam vt demonstratiue errare voluisse videatur. Nos vero, qui a priscis illis tantum scientia, quantum ingenio absumus, hoc certo promittere possumus, eos a nobis

hactenus vinci, qua nos omnia non *ἔδεικται*,  
vt illi, sed *καὶ τὸν Πιθημονικὸν λόγον* demonstraui-  
mus. Ideo confidenti verecundia pronunciamus &  
in ipsius quoque rei inuentione longo inter-  
uallo eos a nobis vinci: quam, cum eos tan-  
diu fugitarit, nos tandem in conspectum ve-  
strum post tot sæcula sistimus, & nunc pri-  
mum nomini vestro dedicamus. Tarde qui-  
dem eruta est. sed altissime condita erat. Ac-  
cipite igitur, nobilissimi, & amplissimi Viri, opus  
expectatione maleuolorum maius, amplitudi-  
ne vestra ad ingenium nostrum inferius, ad  
materiæ dignitatem, non aliorum, quam ve-  
stro nomine dignius. Valete. Lugduni Ba-  
tauorum. Kal. Iunij. CIO. IO. XCIV.

CAN-

# CANDIDO LECTORI

SALVTEM.



**C**VM in animo haberem hæc Elementa describere, quæ valde confusa & perturbata in schedis liturariis habebam: morbo longo oppressus rem diu distuli. Quia vero iamdudum tam amicorum preces, quam maleuolorum conuicia hanc editionem diu desiderari non patiebantur, imperavi mihi: & quamuis à longo & molesto morbo me nondum recepissem: tamen non minus ab animo, quam a corpore æger cœpi illa confusa vtcunque digerere, & in mundum transcribere. Sed non potui facere, quin, quemadmodum morbus in nobis multa sui, ita nos in scriptura multa morbi vestigia reliquerimus: qualia scilicet, sunt litera alia pro alia, verbum pro verbo, vt *ἀπλάσιοι* pro *διπλασιοι*, *πρόβλημα* pro *θύριμα*, & similia: quæ tu, candide lector, tam beneuole mihi condonabis, quam facile deprehendes ea, non mentis, sed calami properantis errata esse. At id, quod nunc dicam, quamuis & ipsum manus festinantis erratum est, tamen maleuoli in aliam partem interpretari possent. Id eiusmodi est in pagina 73 ab illis verbis: *Ergo triginta sex triangula, &c. lineæ 9, ad illa verba: Ergo Complementum, &c. lineæ 20;* ea, inquam, omnia, erant in litura in schedis nostris. quæ tamen aliud agentes huc inferimus. adeo vt quis ea legens animaduertat facile ex alia demonstratione ad hanc translata nihil ad eandem pertinere. Reponantur igitur fugitiua illa, quæ in alius partis schedarum opistographo scripta oculos nostros fugerant. Nempe post illa verba, *esse equalia duobus circulis: Dic:*

*Si triginta segmenta & octo residua trianguli excedunt circulum duobus triangulis: ergo triginta segmenta, & decem residua trianguli excedunt circulum duobus triangulis, & totidem residuis trianguli, quæ sunt duo Complementa. Rursus duplū triginta segmentorum, & octo residuorum trianguli, hoc est, sexaginta segmenta & sexdecim residua trianguli excedunt duos circulos quatuor triangulis. Excedent ergo triginta segmenta, item triginta sex triangula, & sex residua trianguli quatuor triangulis. Auferantur utrinque triginta segmenta, & sex residua trianguli. Ergo remanentia triginta segmenta, cum decem residuis triangulis*

(qua



(que, ut iam diximus, sunt equalia circulo cum duobus triangulis, & duobus residuis trianguli) excedunt triginta sex triangula remanentia, quatuor triangulis. ablati duobus triangulis de circulo & de duobus Complementis, circulus remanens cum duobus residuis trianguli excedet triginta sex triangula duobus triangulis. Duo igitur triangula de duobus complementis dempta relinquunt duo triangula de quatuor triangulis. Item duo residua Trianguli de iisdem duobus Complementis relicta relinquunt duo triangula de quatuor triangulis. Quare duo Complementa sunt quatuor triangulis equalia. Ergo Complementum dividitur, &c. Hæc igitur a 9. linea ad 20, inferes loco illorum, quæ huc malum pedem tetulerunt.

Pag. 75: post lineam ultimam addi possunt hæc. ALITER: Brevis demonstrari potest: Triginta duo segmenta cum octo residuis segmenti sunt equalia quadraginta triangulis. Sed duo segmenta cum octo residuis segmenti, sunt equalia decem triangulis. Ergo triginta segmenta cum decem triangulis sunt equalia quadraginta triangulis. Ablatis utrinque decem triangulis remanent triginta triangula totidem segmentis equalia. Ideo triangulum & segmentum equalia. Quare triginta triangula cum sex segmentis sunt equalia triginta sex segmentis, aut triginta sex triangulis, etc.

Pag. 8. linea EM, EN. Lege: Potentius triangulorum EBA, & dupli CFA, & quadrupli HGA simul, &c. Nam omittæ sunt ab artifice duæ minusculæ literæ e, h, in circulo in rectis EF, EG, ubi secant rectas BA, FA.

Ibid. lin. AC duplum. lege: Ergo circulus AFBCD circuli ALBE

Pag. 20. Circa datam. lege: Volutam ordinatam.

Pag. 21. lin. autem peripheri. lege Peripheriam DFH.

Pag. 23. lin. nullo semid. Pro F gran-

diuscula pone minusculam f. Pag. 24. lin. rabili erit. lege: erit AR apotome.

Pag. 25. lin. est B C. lege: abscondit Apotomen AR.

Pag. 27. lin. peripheriam. lege: Peripheriam BHA.

Pa. 31. lin. ἡ κύκλι. lege Διαπλάσιον.

Pag. 34. lin. 14. quadrata lege contentibus perinde sunt.

Pag. 39. lin. 256. lege CG est 144.

Ibidem lin. 14. rimetri: lege per Coroll. VIII sexti.

Pag. 43. lin. FH ad totam. lege GH ad totam

- ad totam. Et deinceps pone semper G pro F.
- Pag. 44. lin. *peripheria* LD. lege: *peripherie* IL D, ad ipsam *peripheriam* IL D, ex eadem.
- Pag. 53. lin. *gantur*. lege: *recta* FB, FL. Deleantur enim illa, FD.
- Ibid. lin. *gulo*. lege: *per* VI primi.
- Ibidem. lin. *erit* ut MN. lege: *Sed* MN, ML *ex constructione*.
- Pag. 56. lin. CF, EG. lege: *Abscindatur* *recta* EH *aequalis*.
- Pag. 58. lin. *gulum* BGD Peccatum a sculptore in constructione trianguli BGD. Nam interuallum VG minus sumptum est interuallo DV.
- Ibid. lin. *Tessares* *cadecagoni*. Verba illa deleantur: *Ex peripheria* EG *abscindatur* *recta* EV *aequalis* *recta* CS. &.
- Ibid. linea: *lygonorum*. lege: AMB, ASB, ATB, AFB.
- Pag. 62. lin. *diuisis*: lege *interuallis*, MG, MK.
- Pag. 63. lin. *wante*. *iunctis* HG, HE. Lin. HG est omissa a sculptore.
- Ibid. lin. OG, OK. leg. OG, vel OK.
- Pag. 65. lin. *semidiameterus*. lege *bis* *fariam* in F. *Conectatur* *recta* GH. *Peripherie*.
- Pag. 66. lin. *rursus*. lege, RF, RK.
- Pag. 69. lin. DβγE. lege: DβγE.
- Pag. 70. lin. GDE. lege GEF *Complementum*.
- Pag. 71. lin. *nempe* *utrumque*. lege *Sed* *Residuum* *trianguli*, &
- Pag. 87. lin. *Excessus*. lege: *Excessus* *enim* est  $\frac{1}{2}$ .
- Pag. 84. lin. *rectangulo* *sub*. lege: *rectangulo* *sub* MA, & LN.
- Pag. 88. lin. *diameterum*. lege *faciat* *latitudinem*.
- Ibidem lin. ΠΡΟΤΑΣΙΣ lege ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Θρώπυα.
- Pag. 100. lin. & *alternando*. lege & *conuersum*, ut KH.
- Pag. 101. lin. *cuius*, *qui*. lege *ita* C, *hoc* est, *superficies* KLMNOL.
- Pag. 106. lin. *sentia* *igitur*. lege *sentia* *igitur* *quadrati* ABCD.
- Pag. 108. lin. *tia* *tantum*. lege *aequalis* *ipsi* QM.
- Pag. 109. lin. *mita*. lege: *triangulum* BRM.
- Pag. 111. lin. IM, *erit*. lege: *triangulum* HMI.
- Pag. 116. lin. *poterit*. lege, *est* *maius* *rectangulo*.
- Pag. 118. linea asbt. lege: asbt. *Contrarium* *ac* *in* *maiore* *Ellipsoide*.
- Pag. 121. linea 7. lege. *Potentiam* *maioris* *Ellipsoidos*.
- Ibid. lin. *circulo*. leg. & *angulus* K.

Igitur hæc, candide Lector, prius corrige & repone, antequam ad lectionem horum elementorum aggrediaris. Aliter operam luscris.

HENRICI,  
D. G.  
CHRISTIANISSIMI  
FRANCIÆ ET NAVARRÆ  
REGIS,

SANCTIONE CAVTVM EST:

NE QVIS, QUOSCVNQUE LIBROS NVNQVAM ANTE EDITOS  
FRANCISCVS RAPHELENGIVS, CHRISTOPHORI PLANTINI  
GENER, PRIMVS TYPIS VVLGAVERIT, EOSDEM, CITRA IPSIVS  
(RAPHELENGII) VOLVNTATEM, INTRA PROXIMVM A PRIMA  
CVIVSQUE LIBRI EDITIONE DECENNIVM, TOTOS VEL EX PARTE,  
IN VLLIS REGNI FRANCIÆ DITIONIBVS IMITARI, EXCVDERE,  
ALIBIVE EXCVSOS IN IISDEM VENALES EXPONERE AVDEAT.

PRIVILEGII CONDITONES, INDICTÆQUE INFRACTORIBVS  
MVLCTÆ, LATIVS CONTINENTVR IN LITERIS REGIIS; DATIS  
SIGILLATISQUE IN CONSILIO REGIS, PARISIIS, XXI. APRILIS,  
ANNO CLO. ID. XCIV. ET REG. IPSIVS QVINTO, AC SIGNATIS, 4.

DE BAIGNEVLLX.

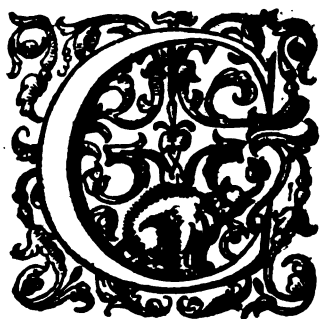
*Exemplar Privilegij Regij in fine  
Mesolabij adpositum est.*

# PROLEGOMENA<sup>1</sup>

## IN CYCLOMETRICA

### Elementa.

*Ad candidum Lectorem.*



VM IN omni Problemate considerandum sit, semper τὸ ζήτημα, cuius inuestigatio nobis præcipitur, id autem inuenire non sit semper in nostra potestate, veteres illi summi Mathematici, διορισμὸν excogitarunt, quatenus dignosci posset, quando τὸ ζήτημα esset δυνατὸν, aut quatenus ἀδύνατον: eiusque Theoriæ commentarium conscripserat Leon Neoclidis discipulus, Eudoxi æqualis: τὸ ζήτημα, inquebant, aliud est πρόημα, aliud ἀπορον. Πρόημα sunt, quæcunque aut cum demonstratione construi possunt, vt, Super data recta finita Triangulum æquilaterum constituere: aut sine demonstratione, vt, illo centro, & illo interuallo circulum describere. His contraria sunt, quæ fieri quidem posse non dubitamus, sed eorum factio ignoramus, vt circulum quadrare: duas medias proportionales inter duas datas inuenire. Quæ quidem, quatenus eorum factio ignorabilis, à veteribus dicuntur ἀπορα, quatenus autem fieri possunt, dicuntur πορεια. Nam quatuor continuè proportionales inuenire quidem possumus, per XII sexti: sed illarum quatuor datis extremis, quomodo duæ mediæ proportionales reperiri possint, nemo quidem hætenus comminisci potuit, sed nemo paulo doctior desperauit inueniri posse. Quia enim hætenus via, quibus illæ inuestigandæ sint, patefacta non

A fuit,

fuit, propterea negare ullam esse viam illas deprehendendi, id vero est hominis ἀγνωμοσύνης, & nihil omnino in Mathematicis videntis. Nam quomodo demonstrare possunt id fieri non posse, aut circulum quadrari non posse? Nullam adferre possunt demonstrationem, nisi inanibus contentionibus apud doctos sese traducere velint. Multa à veteribus Geometris ἀπορητικά edebantur, quod exploratum haberent, ea fieri quidem posse, sed tamen nondum fieri, quia nondum possent demonstrari. Ipsi tamen ea vulgo proponebant, contenti indicare, & digitum ad fontem intendere: quasi magnæ sibi laudi fore putantes, si in eorum laude, qui ea demonstrare possent, acquiescerent. & sanè Conon de voluta ordinata proposuit tantum: Archimedes autem demonstravit. Idem etiam Archimedes ἀπορητικά multa mittebat familiaribus suis, sine ullis demonstrationibus, tanquam homines nudos detractis vestimentis, Dositheo quidem περὶ κωνοειδέων, & Σφαυροειδέων, Cononi autem Samio περὶ ἑλίκων: quæ cum primùm dumtaxat proposuisset, postea tamen demonstravit. Ista ἀπορητικά etiam dicebantur ἠπορητικά: postquam autem demonstrationem nacta erant, τεθεωρημένα. De quibus problematis merito dici potest, quod de Camelo Æsopico: quem primum visum reformidarunt homines: processu temporis propius accedentes, cicurem & mansuetam bestiam esse experti sunt. Quod respiciens Archimedes, ποια, inquit, πᾶν ἐν γεωμετρίας, θεωρημάτων οὐκ διέδοξα ἐν δευτέρῃ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι. Ergo τὰ πρότερον ἠπορητικά aut ipsimet soluebant, ut Archimedes illa ad Dositheum, & Cononem. aut alij postea demonstrabant, ut Archimedes τὰ ἐπὶ Κόνωνος περὶ ἑλικῶν ἠπορητικά, item Hermetimus proposita ab Eudoxo, & Theæteto. Inter tot ἀπορητικά nobilessimum illud à vetustissimis Græcis propositum est: τὸ ἕκκλιον Ἰππιδῶ ἴσον χωρίον διδύγραμμον διρεῖν. Circulum esse χωρίον ne ij quidem negauerint, qui circulum quadrari posse negant. (Quod genus hominum χθές καὶ πρῶτον εἰς οὐδὲν ἀνθρώποις εἰσεφθάρη) Sed qua fronte nega-

nega-

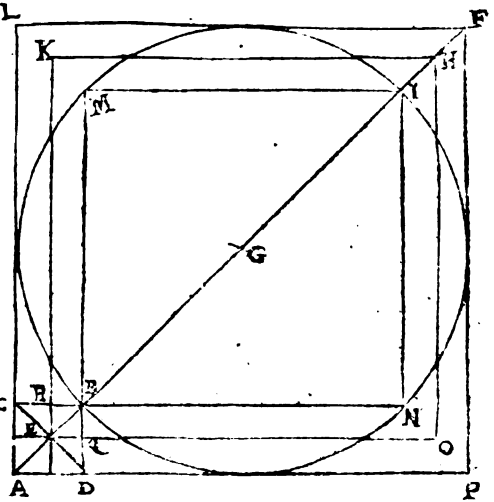
negabunt spatium spatium æquale dari posse? Quare rem tanta contentione veteres illi summi viri, & omni exceptione maiores tentassent, nisi πορῖσόν π esse putassent? Atque ut horum novitiorum rationem habendam non censeo, ita illorum iudicia probare minimè possum, qui ob id circulum quadrari posse dicunt, quod & quædam Lunula quadrari potest, quæ μηίσκος Græcis dicitur; auctorem secutis Hippocratem Chium. Præpostere enim concludunt: quod non ideo circulus quadratur; quia & lunula: imo lunula & circulus ideo quadrantur; quia ambo sunt spatia, & omni spatium spatium rectilineum æquale dari potest. Nullum quippe spatium esset, nisi & quædam eius esset δυνάμις. At δυνάμις nihil aliud est, quam quadratum. Est ergo quadratum aliquod circuli; id est, quadratum aliquod, cui spatium circuli, quod Græci ἐμβαδὸν κύκλου vocant, æquale sit. Qui igitur circulum quadrari posse negant, vna opera & circulum δυνάμιν esse negant. Aut quænam erit hæc fabula, Circulum esse δυνάμιν; & tamen huic δυνάμει nullam δυνάμιν æqualem reperiri posse? En hominum Geometriam. Nos verò cum Marino vetere Geometra aliter pronunciemus: ἀπορήσει, τὸ τῶ πορῖμω ἀπτικειμῶν ἔχον ὡς ὁ ἔ κύκλου τέτραγωνισμός. ἔπω γὰρ ἐστὶ ἐν πόρῳ, εἰ δὲ οἶόν τε αὐτὸ πορῖδ' ἴσῃ, καὶ ἐστὶν Ἰππικητόν. Ἰππικητόν γὰρ αὐτὸ ἔπω κατέληπται. Neque aliter sentiunt Aristoteles, & eius omnes veteres interpretes Græci, alij homines ab istis novis quadrationis circuli hostibus. Cum igitur quadratio circuli sit πορῖσῆ quidem, non autem ἐν πόρῳ, non mirum est, si tantum studium veteres in πορῖσῳ eius posuerunt. Quibus animaduersis altius repetenda est huius rei ratio, & quid & quantum in ea effecerint illi. In circulo duo sunt ἀπορῆ: ratio perimetri ad diametrum, & τέτραγωνισμός ἔ ἐμβαδού, hoc est ἔ Ἰππικῆδ' ἔ κύκλου. Atque propterea hæc tractatio in duo summa fastigia diuiditur: in id scilicet, quod ad perimetrum; & in alterum, quod ad potentiam circuli pertinet. Priorem partem vocemus τὸ κυκλοπεριμετρικόν, alteram τὸ κυκλοδυναμικόν: in quæ summa capita, ut

diximus, tota *κυκλομετρησία* diuiditur. De recta quæ perimetro sit æqualis, parum laborarunt, imo ne curarunt quidem. Eam enim & aurigæ quotidie notare licet, cum ex quauis orbita rota eam abscindat ad idem punctum, quod in ea est, à quo primum moueri cæpit, reuoluta. Tam trita enim res negotium nemini paulo intelligentiori faceffere potuit. Quare Archimedes prima propositione Cyclometrici sui proponit triangulum orthogonium, cuius angulus rectus continetur semidiametro, & recta, quæ perimetro æqualis sit, cum tamen nihil dum de ea demonstrasset: quod sciret rem omnibus notam in dubium nunquam reuocatum iri. Itaque cisiarij vel aurigæ est, dare modum illius lineæ: Geometræ autem demonstrare, quæ eius ratio sit ad diametrum: item quomodo circulo dato illa reperiri possit: quod quidem Archimedes diuinus, licet infeliciter, & mendosissime, in secunda & tertia demonstratione eiusdem libelli exequitur, cum eam longitudinem numeris exprimere conetur, quod post illum aliis numeris Apollonius Pergæus, & Philo Gadareus tentarunt, excogitatis infinitis myriadam affræctibus, ex quibus lector pedem extricare non possit. Sed noui Geometræ præter stuporem, quo negant, circulum quadrari posse, volunt liberius insanire, cum aiunt, ideo circulum quadrari non posse, quod, vt aiunt, ex rotunda linea, nunquam efficies rectam. Nam nolui eorum verba mutare. Itane, doctissimi Geometræ, delitiæ humani generis? Quid habet commune peripheria circuli cum eius potentia? non mehercule magis, quam quadratio *μηνίσκου*, cum linea, quæ *κυρτή*, & ea, quæ *κοίλη*. Neque magis, quam cum curuatura delumbata *ἡ ἀδαβολή*, quam quadravit Archimedes. Quocumque sese vertunt isti θαυμάσιοι Geometræ, semper aliquid nouum sciscunt, vnde eorum captus in Geometricis cognosci possit. Sæpe mihi risum tollunt: aliquando etiam bilem mouent. Tanta eorum est cum tanta inscitia coniuncta impudentia. Sed ad rem. Ad negotium cycloperimetricum pertinent polygona circulo inscribenda, &

da, & consequenter triangula isoscelea, quorum alteruter æqualium angulorum habeat rationem datam ad reliquum. Sed eorum rationem hæctenus ignoratam videmus. Quid autem Archimedes mouerit, ut aduersus ὀφθαλμοφανείαν, & χρονογίαν ipsam, rationem perimetri longitudinis ad diametri longitudinem pronuntiaret supra triplam, minorem esse vna septima longitudinis diametri, infra dicitur. Sed & excusandus videtur, quod quomodo ea linea Geometricè inueniri possit; non definiuit. Multi enim ante eum putarunt se eius rei viam iniisse, excogitatis aliis aliis curuis lineis infinitis, quas τετραγωνιζέσας vocarunt: quod per illas sese quadrantem perimetri inuestigaturos sperarent: & sub quadrante perimetri, aut ipsa perimetro, ac diametro, aut semidiametro rectilineum conceptum potentia circuli esse æqualem crederent. Itaque Hippas vetustissimus Geometra, omnes veterum τετραγωνιζέσας in vnum conspectum coniecit, ac de illis volumen conscripsit. Sed valde illos decepit opinio sua. Nam nulla est cognatio ἔμβασδος cum rectilineo sub semidiametro ac perimetro concepto. Eorum, qui τετραγωνιζέσας commenti sunt, familiam ducere videtur Dinostratus, omnium, ut videtur, vetustissimus, utpote Menæchmi frater, Eudoxi æqualis, commentus lineam decircinationis delumbatæ, ut verbum Vitruuianum usurpem, quam ipse falso τετραγωνιζέσασιν vocauit: cum ea nihil ad τετραγωνισμόν faciat, ut alibi ostendimus. Ea nihil aliud est, quam ἑλιξ σισαλωμένη, voluta luxata, aut delumbata: cui nos personam detraximus; ac eius decircinandas rationem docuimus, quod fieri posse desperauit olim Sporus Nicenus. Ea enim comparata fuit non ad τετραγωνισμόν, sed ad quadrantem perimetri inuestigandum. Præterea ostendimus punctum in ea, quod πέρασ τῆς τετραγωνιζέσας vocat Pappus post Sporum, quomodo Geometricè deprehendatur, quod tamen omnino negauit fieri posse apud Pappum Sporus. Cuius Pappi verba attulimus: τὸ πέρασ αὐτῆς, ὡς ἔστι, πρὸς τὸν τετραγωνισμόν ἔκ κύκλου, ἔστ' ἑστὶ, καὶ ὁ τέμνει σημεῖον τὸ αὐτὸ διδοῖται, ἕχθ' ἑλίκε'.

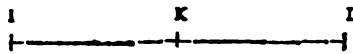


Nos ergo plus fecimus, quam & Dinostratus ipse, & quam Sporus. Nam & quid esset, & quomodo describi posset, ostendimus, & præterea punctum ipsum non solum deprehendimus, sed etiam, quid esset, docuimus. Omnino *τελεγεγωνίζουσα* Dinostrati nihil aliud est, quam dimidium Volutæ luxatæ; quod iam tetigimus. Sequitur cyclodynamica pars longe nobilior, quam illa altera, & propter quam in tot contraria studia discessum est à veteribus. Nam *ἀπογεω* illud & nobilissimum omnium, & antiquitus omnibus propositum fuisse, palam est. Primus omnium quod sciamus Bryson, siue Brison, (*Βρύσων, & Βερίσων* inuenio scriptum) illi manus iniecit. Circa circulum  $IB$ , cuius centrum  $G$ , describatur quadratum  $FA$ , & in eodem inscribatur quadratum  $IB$ . Rursus idem centrum  $G$  obtineat quadratum  $HE$ , cuius latus  $EK$  sit æquale rectangulo sub  $BM, AL$ , hoc est, sub lateribus quadratorum, inscripti, & circumscribentis. Ducta diametro  $FA$ , rectæ  $NB, OE$  productæ occurrant lateri  $LA$ : item rectæ  $KE, MB$  occurrant productæ lateri  $AP$ . Per  $XXIII$ . sexti, rectangulata tam  $BA$ , quam  $BE, EA$ , sunt quadrata. Connectatur recta  $CD$ . Erunt anguli  $BCD, BDC$  semirecti: angulus vero  $CRE$ , rectus. Ergo angulus  $REC$  semirectus, per  $XXXII$ . primi. Quare per sextam eiusdem, rectæ  $RC, RE$  sunt æquales. Eodem modo demonstrabitur, rectas  $QE, QD$  esse æquales. Igitur parallelogramma  $CE, ED$  sunt quadrata, & æqualia quadratis  $BE, EA$ . Imo quatuor quadrata,  $BE, EA, CE, ED$  sunt inter se æqualia, per primam communem sententiam. Ergo & diametri  $BE, EA$  sunt æquales. Æqualiter igitur distat quadratum  $BE$  à quadratis  $FA, IB$ : & propterea medium est tam situ, vt demonstratum est, quam potentia, ex constructione.

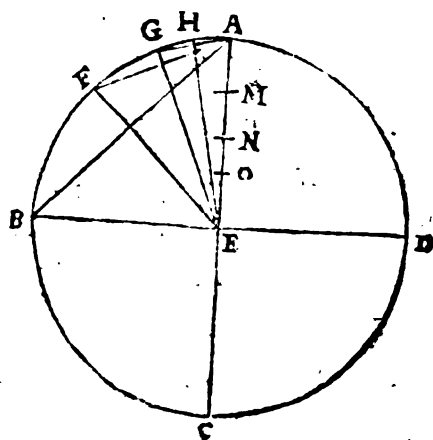


etione. Sumptum enim est medium proportionale inter latera  $IM, FL$ . Bryson igitur considerans minus quadratum dari posse circulo, nempe quadratum  $IB$ , & maius quoque eodem, nempe quadratum  $FA$ : putavit æquale circulo esse id, quod medium esset inter minus  $IB$ , & maius  $FA$ . Erit igitur ipsum  $HE$  æquale circulo. Ita ille. Sed hoc epichiremate multis nominibus ludibrium omnibus debuit. Primum, quod medium inter quadratum circumscribens, & quadratum inscriptum, non meruit magis esse æquale circulo, quam alia quævis æquilatera figura, media inter similem inscriptam, & similem circumscribentem. Imo longe minus est quadratum  $HE$  quadrato circuli: quia quadratum circuli maius est latere trigoni isopleuri eodem circulo inscripti:  $HE$  vero quadrati latus  $KE$  minus eodem latere. Multo minus igitur latere quadrati circulo æqualis. Nam latus trigoni isopleuri est æquale rectangulo sub tota diametro, & tribus quartis longitudinis diametri. Latus vero  $KE$  est æquale rectangulo sub eadem diametro, & latere  $IM$ . quod quidem minus est tribus quartis longitudinis diametri. Deinde datis minore, & maiore, posse dari medium aut æquale, falsum convincit  $\eta$  *κερα* *βουδης* *γωνία*, qui est angulus minor omni minimo angulorum rectilineorum. Omitto alia *ἀπορήματα*: quorum præcipuum est latus quadrati  $KE$  longe minus, quam latus quadrati circulo  $IMBN$  congruentis. Quod primus apprehendit, certè primus publicavit Antipho ita. Esto circulus  $ABCD$ ,

cuius quadranti  $EAB$  inscriptum sit quadrati latus  $BA$ . Rursus recta

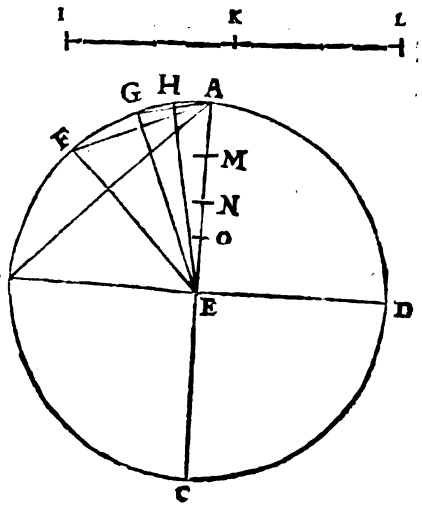


$EF$  diuidat bifariam peripheriam  $AGFB$ . Itidem recta  $EG$  diuidat peripheriam  $AGF$  bifariam. & denique recta  $EH$  peripheriam  $GHA$  bifariam. Subtendantur recta  $FA, GA$ . Componantur in vnum omnes po-



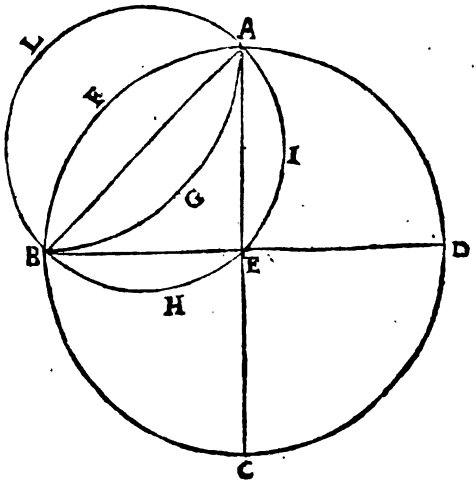
tentia

tentia triangulorum inscriptorum, per XLVII primi. Itaque potentiis EM, EN, EO triangulorum EBA, & dupli EFA, & quadrupli GHA simul compositis, confluit potentiam IK B æqualem quadranti EFGA. Putavit enim hac continuâ sectione sese affecutum peripheriam AH. Propterea dupla IKL erit quadruplum ipsius EFGA, atque ideo æqualis toti circulo ABCD. Sed hoc est *κῶλον τεμαχίζειν*, non autem *τέλεγγωνίζειν*. Præterea rem absurdam facit, qui desinens in sectione peripheriæ GHA putavit non amplius posse secari. Tollit enim *τὴν εἰς ἀπειρον τομὴν*. Deinde quod existimavit posse dari peripheriam subtēſæ æqualem: aut si non putavit, quomodo putat se rem factam habere? Hunc Antiphontem excepit valentior secutor, vt omnes veteres sentiunt, Hippocrates Chius, ex mercatore & naufrago Geometra, & philosophus: Cuius hoc fuit *Ἐπιχείρημα*. In circulo AFBCD, diametris AC, BD sese normaliter secantibus, inscribatur latus quadrati AB. circa quod describatur circulus ALBE. Per II duodecimi, vt quadratum AC, ad quadratum AB, ita circulus AFBCD ad circulum ALBE. Est autem quadratum AC duplum quadrati AB. Ergo circulus AFBCD, ALBE duplus: & consequenter semicirculus BFAD toti circulo ALBE, & quadrans AFBEA semicirculo ALBA æqualis. Ablato communi AFBA, remanebit *μηνίσκος*, siue, vt Plautus loquitur, lunula ALBFA triangulo ABE æqualis. Propter hanc Lunulæ quadrationem, immane quantum nomen Hippocratis fuerit, apud veteres adeo, vt Proclus non



vulgari

vulgari



vulgari

vulgari genere ob id eum commendavit. Equidem Geometriam hic agnosco, acumen non video. Nam si omnem Lunulam quadrasset, magnum quidpiam præstitisset τὸ καὶ ἰσομύκτοις πρὸς ἑαυτὸν. Nunc vero rem vulgatissimam & cuius Geometriæ tironi parabilem fecit. Porro quadratum  $AC$  est quadruplum quadrati  $AE$ . Sed idem est duplum quadrati  $AB$  diametri circuli  $ALBE$ . Ergo recta  $AE$ , aut  $EB$  est latus quadrati circulo  $ALBE$  inscripti. Erit ergo  $AIE$ , vel  $EBH$  segmentum quadrati. Et quia circulus  $AFBCD$  circuli  $ALBE$  est duplus: propterea, per  $XV$  quinti, segmentum  $AFB$  segmenti similis  $AIE$  erit duplum. Describatur segmentum  $AGB$  segmento  $AFB$  æquale. Erunt igitur segmenta duo, vel figura  $AFBGA$  composita ex utroque, æqualis quatuor segmentis quadrati circulo  $ALBE$  inscripti. Quare reliqui duo  $\mu\eta\eta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\iota\varsigma$   $ALBFA$ ,  $AEBGA$  sunt quadrato æqualia circulo  $ALBE$  inscripto. Nihil igitur novi egit Hippocrates, qui in  $\mu\eta\eta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\iota\varsigma$  duos quadratum circulo inscriptum transformavit. Nam absque illa quadratione quadratum semper est  $\gamma\omega\gamma\epsilon\mu\omicron\nu\sigma$ , segmenta autem  $\acute{\alpha}\pi\omicron\sigma\epsilon\alpha$ . Hoc, inquam, non magis facit ad quadrandum circulum, quam quadratum ipsum circulo inscriptum, cum idem vnumque sint. Quare cum ille  $\mu\eta\eta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\iota\varsigma$   $\tau\epsilon\lambda\epsilon\alpha\gamma\omega\gamma\iota\sigma\mu\omicron\varsigma$  nihil ad  $\kappa\acute{\omega}\nu\kappa\lambda\omicron\varsigma$   $\tau\epsilon\lambda\epsilon\alpha\gamma\omega\gamma\iota\sigma\mu\omicron\nu\sigma$  faciat, quomodo Hippocrates circulum per Lunulam quadrare conatus sit, amplius deliberandum. Nam non quadrasse, certum est. Neque veteres vero, neque Aristoteles hoc aperierunt. Tantum colligimus ex primo de Natura eum institisse principis Geometriæ in quadrando circulo. Ibidem autem ait hoc fecisse per  $\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ . Quare obscurissimum est, quod inde colligimus, Antiphontem non servasse principia, Hippocratem servasse. Nam Hippocrates & Antiphon sumpserunt  $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\epsilon\lambda\epsilon\iota\kappa\acute{\alpha}\varsigma$  quadratum circulo inscriptum: Hippocrates quidem Lunulas duas quadrato æquales: Antiphon autem ipsum quadratum: Hippocrates, inquit Aristoteles, absoluit  $\tau\epsilon\lambda\epsilon\alpha\gamma\omega\gamma\iota\sigma\mu\omicron\nu\sigma$   $\delta\iota\alpha$   $\tau\mu\eta\mu\acute{\alpha}\tau\omicron\nu\sigma$ : hoc est, tandem sumpsit peripheriam tanquam hypote-

B

nuse

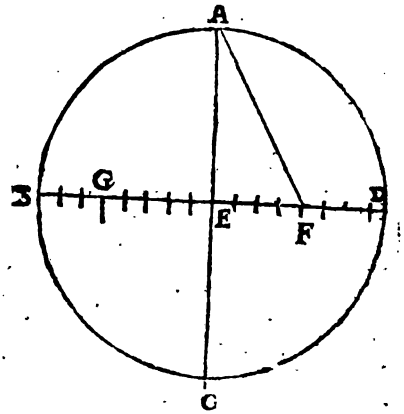
nusæ æqualem. Idem fecit & Antiphon : quod est contra principia Geometriæ. Itaque cum Aristoteles dicat alterum Geometricæ, alterum non Geometricæ rem tractasse, difficile est certum de toto negotio pronunciare. Non multo post Dinostratus Eudoxi familiaris rem aggressus est, adhibita in consilium linea, quam, ut diximus, frustra *τελεγωνίζεσθαι* vocavit. Neque enim magis quadrataria, quam quadrantaria vocanda fuit, quod ad quadrantem perimetri inveniendum excogitata sit, non ad circulum quadrandum. Quia iste vetustissimus est auctor, non immerito suspicamur, eum principem *τελεγωνίζεσθαι* excogitasse, cum alij multi *τελεγωνιζέσθαι*, ut diximus, architectati sint. & sane, friuola causa ei commento præiuit. Putavit enim primus omnium rectangulum sub semidiametro & semiperimetro conceptum aut triangulum rectangulum, cuius duorum laterum angulum rectum continentium, alterum semidiametro, alterum toti perimetro æquale esset, posse τὸ ἔμβαδὸν κύκλου. Hæc enim opinio fuit incus omnium *τελεγωνιζέσθαι*. Nam quo quadrans perimetri, aut semiperimetris per illam lineam inuestigata, si non eam ad *τελεγωνισμόν* facere existimarent? Quod indubitate verum est. Hos (qui omnes æquales fuerunt) longo interuallo sequitur Archimedes, qui in circulo quadrando nihil novi contulit de suo, sed *τεμαχισμόν* ab Antiphonte, inuestigationem *ἔμβαδῶν* à Dinostrato, reiecta tamen quadrataria linea (quia eam construere non poterat) demonstrationem à Brysone, emendatis tamen prius eorum principiis, mutuatus est. Nam cum putaret potentiam per *τεμαχισμόν* & segmenta Antiphontis deprehensam omnino conuenire circuli potentia, placeret autem illi sententia Dinostrati de rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro contento, id autem non posset demonstrare, ad incitas redactus confugit ad argumentum Brysonis, aut non abludens ab eius argumēto. Quemadmodum enim ille dicebat, posse æquale reperiri, si maius & minus constant: ita Archimedes putavit, si triangulo proposito circulus pro-

positus

positus non esset maior, aut minor, ergo æqualem. Quod manifesto vitiosum est, vt alibi demonstraui. Præterea cum hæreret sententiæ Dinostrati de rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro contento, & tamen videret, id rectangulum maius esse potentia per *τεμαχισμὸν* Antiphontis inuenta, ausus est rem absurdissimam pronunciare: perimetrum scilicet circuli, præter triplam, esse minorem septima longitudinis diametri. Exposita enim diametro septem partium, rectangulum comprehensum sub vndecim septimis diametri, & semidiametro est maius potentia circuli. Duo ergo *ἀτοπήματα* commisit. alterum, quod credidit cum Dinostrato τὸ ἑμβασθὸν ἢ κύκλῳ esse æquale rectangulo sub semidiametro, & semiperimetro concepto. alterum, quod, vt id tueretur, pronunciauit perimetrum circuli, cuius diameter esset septem partium, minorem fore viginti duabus septimis. quo facto meruit, vt ab Orontio diuinus, & humano maior vocaretur. Sed nescit, quid dicat. Si quisquam diuini ingenij Archimedis admirator & studiosus, is ego sum. Sed caueant adolescentes à scopulis τῶν εἰς ἀδιώματα ἀπαγωγῶν eius. Suspectus enim est. Et sanè absurdissima non pauca eius errata, deprehendimus: quod commodiore & tempore & loco dici potest. Cæterum *τεμαχισμὸς* ille circuli (nemo grauetur hoc verbum) quo videtur vsus Archimedes, quanuis proxime abest à vero, multum recedit à principiis Geometriæ. Non enim, si circino aliquam magnitudinem alicui magnitudini æqualem deprehendero, continuo sequitur, eam illi magnitudini æqualem esse. Id enim verum esse incredulus inficiabor, si *Ἀριστομετρικῶς* demonstrari non potest. Nam media proportionalis inter semidiametrum, &  $\frac{22}{7}$  diametri τὸ ἑμβασθὸν ἢ κύκλῳ æqualis esse videtur: cum tamen non sit. Rursus quidam ἀγνοήσαντες superiore memoria pronunciarunt semilatus Trigoni isopleuri circulo inscripti esse latus Heptagoni eidem circulo inscribendi. Sane, ita videtur conuenire, vt si aliter nos vindicare non possumus, manus dandæ sint. Sed nos incommensurabile esse diametro

ostendere possumus, cum diameter tamen sit potentia commensurabilis lateri isopleuri. Quare cum eiusmodi magnitudines pro veris accipimus, quia demonstrare non possumus, decoquimus nomen nostrum, & frontem perfricamus, aliqua impudenti reductione ad impossibile nos strenue liberantes. In quo Archimedes adeo creber est, ut non regnum in Geometria obtinere, sed tyrannidem exercere videatur. Quare, ut toties monuimus, non pauca ab eo falso collecta sunt. Eiusmodi paralogismata *ψευδάρια* vocabat Euclides, cuius librum *ἄλλοι ψευδάρια* invidit nobis iniuria temporis. Vno exemplo & mentem meam assequeris, & *ἀπὸ τῶν ψευδάρια* cauere potes. Circuli  $ABCD$  diameter  $BD$  sit expositarum partium XVI:

quam rursus diameter  $AC$  secet normaliter. Semidiametro  $ED$  in puncto  $F$  bifariam secta, iungatur recta  $FA$ : cui æqualis abscindatur ex longitudine  $FB$ , recta  $FG$ . Manifestum est ex hypothese, qualium XVI. est longitudo  $BD$ , talium XIII esse  $DG$ , & IX longitudinem  $FG$ . Sed quamvis recta  $FA$  videatur tangere fines puncti  $G$ , imo nemo



rem propius putabit, qui non dicat  $G$  esse in XIII sectione diametri: tamen longe aliter res habet. Quadratum  $EA$  est quadruplum quadrati  $EF$ . Ergo per XLVII. primi, quadratum  $FA$  est quintuplum quadrati  $EF$ . Quadrata igitur  $EF, FA$  rationem inter sese habent, quam numerus ad numerum: & propterea commensurabilia sunt, per V decimi. Sed quinque ad unitatem rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo quadratorum  $EF, FA$  latera sunt incommensurabilia, per postremam partem IX eiusdem. Longitudo autem  $EF$  expositæ *ῥητῆ*  $BD$  est commensurabilis. Ergo longitudo  $FA$  eidem  $BD$  erit incommensurabilis, per XIIII decimi.  $FA$  igitur rectæ  $BD$ , aut rectæ  $EE$ , id est rectæ  $FD$ , est potentia.

tentia tantum commensurabilis. Quare recta  $FA$ , vel  $FG$ , cum recta  $FD$  composita faciet binominem, per  $XXXVII$  eiusdem: & propterea tota  $GD$  irrationalis erit, per eandem.  $DG$  igitur aut non peruenit ad  $\rho\eta\tau\acute{o}\nu$  terminum  $G$ , aut excessit. Sed non peruenisse ita demonstrabitur. Rectæ  $GD$  inæqualiter sectæ in  $E$  minus segmentum  $GE$  potest quintuplum  $EF$  dimidiæ partis ex maiore segmento  $ED$ . Quare per conuersam  $III$  tertij decimi Elementi demonstratam à Campano, tota  $GD$  secta erit extrema ac media ratione in  $E$ : cuius maius quidem segmentum  $ED$  est  $\rho\eta\tau\acute{o}\nu$ : quadratum autem ab eo æquale rectangulo sub tota  $GD$ , & minore segmento  $GE$ . Est autem quadratum ex  $ED$  tallium  $64$ , qualium  $256$  quadratum à tota  $BD$ , ex hypothesi. Quod si tota  $GD$  præcise esset  $XIII$ , qualium  $XVI$  est tota diameter  $BD$ , rectangulum sub  $GD$ ,  $GE$  esset  $65$ , quod est maius quadrato  $ED$ : & contra definit.  $III$  sexti. Ergo  $GD$  minor est, quam  $\frac{13}{16}$  longitudinis diametri. Et tamen qui nesciret hæc  $\text{Ἰσχυριστικῶς} \ \& \ \gammaεωμετρικῶς \ δεωρεῖν$ , nesciret dignoscere rectangulum sub  $GD$ ,  $GE$  à rectangulo sub  $\frac{13}{16}$  longitudinis diametri &  $\frac{1}{16}$  eiusdem. Sic magnus Archimedes, cum  $\text{τεμαχισμὸν}$  Antiphontis sequeretur, non multum aberrauit quidem à vero: sed cum Chrysippo dicendum est, tantum abesse à vero, quantum si longius abfuisset. imo tamen si rem tetigisset, neque demonstrare posset, perinde esset, ac si non inuenisset: cum Mathematici sit rem prius in intellectu habere, quam in materia. Prius enim ordine est,  $\tauὸ \ δεωρεῖν$ , posterius  $\tauὸ \ χεργεῖν$ . Archimedes igitur reuocato in usum Antiphontis epichiremate non potuit dignoscere, longior, an breuior esset potentia, quam ex triangulorum velut quodam minutali concinnasset. Quare puto eo nomine à Nicomede reprehensum fuisse, utpote quem ratio de modo perimetri ab Archimede adducta forsitan in eius sententiam perducere potuit. Itaque intermortuam Dinostrati  $\text{Ἰσχυριστικῶς}$  memoriam suscitauit. quod tamen quomodo facere potuerit, non video, cum eius lineæ construendæ nondum ratio



inita esset. Itaque cum tot ex veteribus eximij viri id saxum voluauerint, vnus tantum Archimedis, propter eius celebritatem, ratio habita est, ita vt eius liber supersit, reliquorum epichiremata ac demonstrationes interciderint. Secundum Nicomedem an ex veteribus alius idem persecutus sit, nihil dum certi legimus. Non dubito tamen, quin ad Arabes pruritus ille peruenerit, quæ fuit eius gentis in Geometricis solertia. Sed memoria proauorum Nicolaus de Cusa, & Iohannes Regiomonte visi sunt veterum industriam prouocasse. Non tamê felicitior fuit eorum conatus, quam Orontij, & aliorum, qui memoria nostra idem ausi sunt, qui plus laborarunt, quam promouerunt: quia numeris totum negotium quadrationis subiiciunt: à quibus res ipsa plane aliena est, cum τὸ ἐμβαδὸν ἔκ κλίσεσσι ἄλογον μέγεθος, & Geometrice non arithmetice, explicari possit. Nam post multa laborum tædia exhausta, nihil aliud ex cruce illa assequuntur, quam vt rem diligentius quidem, quam alij, æquè autem infeliciter ac illi, inuestigasse videantur. Tamen tantum abest, vt vituperandi sint, vt potius magnam laudem mereantur, quod vnusquisque eorum, vt superiores vinceret, noua inuenta ad id adtulerit, & Geometriam multis accessionibus epichirematum locupletarit. Neque omnibus illis tam veteribus, quam recentioribus fraudi fuit, non assecutos fuisse id, quod aggressi essent: imo laudi, quod aggressi essent. Mihi vero, quantum video, aliter sperandum est. Quantum enim, aut quid effecerim, nemo adhuc scit, & tamen iandudum magna inuidia flagramus, ex quo maleuolorum naribus labores nostri oboluerunt: & ne ex eo, quod effeci, laudem vllam sperem, ex eo, quod facere volui, magna mihi infamia comparatur. Tanta est inuidiæ cæcitas, vt non me pugnantem spectare sustineant, sed ante pugnam victum prædicent. Sed quinam sunt isti? qui negant spatium spatium rectilineum æquale dari posse: & quod ab antiquis fieri non potuit, ab aliis desperandum esse. Satis huius iudicij sui mihi supplicium dant, quod,

quod, cum ita sentiunt, neque ut Geometræ pronunciant, neque ut Dialectici colligunt. Quem postea fructum temeritatis suæ, & inuidiæ percepturi sint, totū arbitrij tui facio, candide Lector. Mihi satis est, quod à me omnem ἀλαζονείας suspitionem amolitur primum res ipsa, quam summi Dei beneficio, effecimus, contra quam putant isti summi Geometræ: deinde exemplum antiquorum, qui, ut ait Philoponus ἐν ὑπέροις, nunquam id aggressi fuissent, nisi πρόεμον iudicassent. Accipe ergo breuiter rationem instituti nostri. Habes iam diuisionem totius κυκλομετρικῆς περιμετρίας, in τὸ κυκλοπεριμετρικόν, & τὸ κυκλοδυναμικόν. In priore parte Ἀπυσημονικῶς demonstratur perimetri ad diametrum ratio, & quadrantis eius inuestigandi methodus, abiecta illa quadrataria Demonstrati linea, quam tamen valde illustrauimus, & quid sit, nunc primi ostendimus. Hinc & deprehenduntur diuini Archimedis errores, & melius construetur Canon sinuum, quam si statuas diametrum 120 partium, ut fecit Ptolemæus. Apud eum enim diametrus non est talium 120, qualium 360 est perimetrus: cum tamen tales partes diametri assumi deberēt, quales fuerint ipsius perimetri. Sed Ptolemæus habuit rationem diametri, non quam habet ad perimetrum, sed quam habet ad subtendentem quancunque, siue latus polygoni circulo inscripti. quod tuo iudicio perpendendum relinquo. Rursus ad κυκλοπεριμετρικῶν pertinet Polygonorum æquilatorū in circulo inscriptio, hactenus tam ignorata, quam desiderata, quæ tota pendet à triangulis isoscelibus, quorum alteruter æqualium angulorum ad verticalem habeat rationem datam. Hoc inuentum & nobilissimum est, & tanti à nobis fit, ut non vereamur illud cum quadratione circuli contendere. Hinc quoq. pendet perimetri, aut in perimetro ipsa peripheriarum datarum in partes datas sectio. In Cyclodynamico, quod fecimus alteram partem cyclometrici, est ipsius circuli, & segmentorū ipsius quadratio γεωμετρικῶς utique, & κτ' ἐν Ἀπυσημονικῶν λόγῳ, non autem πρᾶξι, ut Archimedes. Arithmetice enim locum hic non habet. In huius materiæ societatem sese offerunt.

16 PROLEGOMENA IN CYCLOM. ELEMENTA.

offerunt multa alia, quæ sine circuli doctrina explicari non possunt: quales sunt superficies cylindricæ, conicæ, solidorum spheræ inscriptorum, ἐλλείψεων, & similia, ex quibus castigantur multa ἔθ' θαυμασίαις ἀρχιμήδους errata. Hæc omnia, candide Lector, optamus tibi vtilia fore. Si non, tu facies vtilia legendo. Vale. Lugduni Batavorum.

KYKΛO-

# ΚΥΚΛΟΜΕΤΡΙΚΟΝ <sup>17</sup>

## ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ Α ΤΟ ΚΑΙ

### ΚΥΚΛΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΝ.

## CYCLOMETRICVM ELEMENTVM

### PRIVS, QVOD ET CYCLOPERIMETRICON

dicitur, siue De ambitu circuli.

### Ο Ρ Ο Ι.

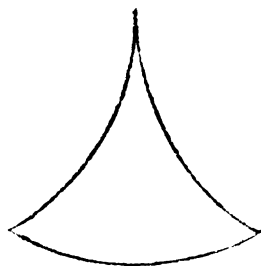
#### A.

**ΠΕΛΕΚΥΣ** ἐξαγώνος λέγεται, ὅταν ἐντὸς μίῳ ἔτραγώνῳ ἰσοπλευροῦ ὡς δὲ δύο πλευρὰς αὐτῆς δύο τμήματα ἐξαγώνου, ἐκτὸς δὲ ὡς δὲ μίαν τὴν λοιπὴν ἐν τμήμα ὡς ἀβληθῆ, τὸ ἐναποληφθῆν χωρίον.

### DEFINITIONES.

#### L

**SECVRICLA** Hexagoni dicitur, quando intra Triangulum æquilaterum duo segmenta Hexagoni, extra verò ad reliquum latus vnum segmentum applicatum fuerit, interceptum id spatium.



#### B

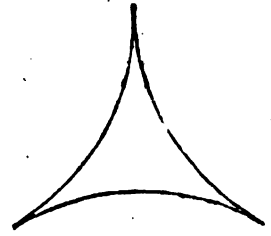
**Παραπλήρωμα** δὲ ἔτραπέζου ἐξαγώνου καλεῖται, τὸ μετὰ δὲ τριῶν ἐξαγώνων τμημάτων τῶν ἐντὸς ἔτραγώνου ἰσοπλευροῦ ὡς δὲ τὰς τρεῖς αὐτῆς πλευρὰς ὡς ἀβληθῆνται ἀφεληθῆν χωρίον.

#### C

#### COM-

## I I.

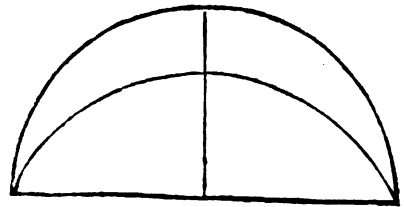
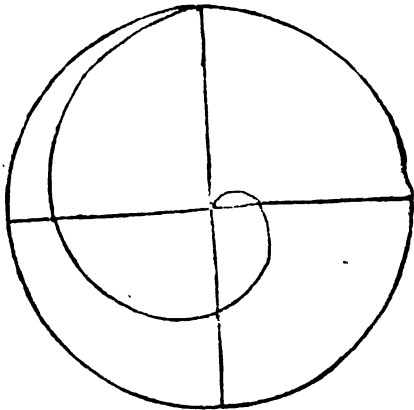
COMPLEMENTVM Securiclaë  
Hexagoni vocetur spatium interce-  
ptum inter tria Hexagoni segmenta  
intra triangulum æquilaterum late-  
ribus ipsius applicata.



Γ.

Ὅταν τὸ πᾶν ἔκ κύκλου τετάρτημορίων τέτραχως διαμεθεύσῃς περιφερείας,  
ἐπὶ τῶν ἐκ τῆς κέντρων ἐπιζυχθῶσάν δι᾽ ἑαυτῶν καὶ ὁμαλίῳ τῆς ἀνξομείωσιν  
ληφθῆ διαστήματά ἴσα, καὶ ἀπὸ σημείων εἰς σημείον κτὶ τὸ συνεχῆς περι-  
φέρεια ἀχθῶσι, τῆς αὐτῆς ἀνομοιομερῆς ἔμφανῆ γραμμῆ καλεῖται ΕΛΙΞ,  
τετραγυμνὴ μὲν ἢ Κόνων Ὁ καὶ Αρχιμήδους, πᾶσιν ἐφεξῆς τῆς ἐπὶ τῶν ἐκ  
κέντρων δι᾽ ἑαυτῶν ληφθῆσιν διαστήμασι, Ἐσαλδιμνὴ δὲ ἢ Δίνος ἐστὶν, μόνον  
τῆς ἑκ κύκλου διαστήματι κυκλωθεῖσα.

## I I I.



Quoties peripheriis quadrantum circuli quadrifa-  
riam diuisis quædam interualla in rectis à centro ad  
signa cōnexis sumpta fuerint per æqualia incremen-  
ta, & decrementa, à signo autem ad signum periphe-  
riæ in continuum ductæ: eiusmodi dissimularis, &  
mixta linea VOLVTA dicitur, ordinata quidem Co-  
nonis

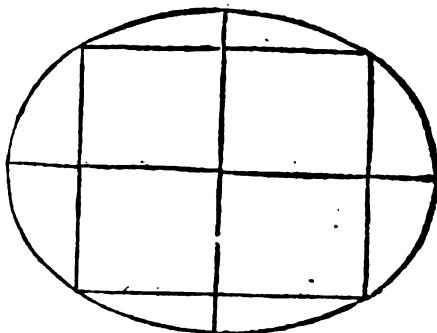
tionis, & Archimedis, omnibus per consequentiam, quæ in semidiamentris sumpta sunt, interual-  
lis: delumbata autem siue luxata Dinostrati, solo  
circuli interuallo decircinata.

Δ.

Εάν ἔπι τῶν πλευρῶν ἔπιμήκοις ὀρθογωνίαι τῶν μὲν δύο ἐλασσόνων  
δύο τμήματα τριγώναι ἰσοπλεύρη, ἔπι δὲ τῶν λοιπῶν δύο, τμήματα δύο  
ἑξαγώναι ἀεμοζόμενα τὸ ὅλον σχῆμα κυκλοειδὲς ποιῶσιν, ΕΛΛΕΙ-  
ΨΙΟΕΙΔΕΣ καλεῖσθω.

IIII.

Si super lateribus oblon-  
gi rectanguli duobus quidem  
minoribus duo segmenta  
Trianguli isopleuri, super re-  
liquis autem duobus duo se-  
gmenta Hexagoni accomo-  
data figuram totam circula-  
rem componant, vocetur ELLIPSIODES.



Ε.

Τὸν κύκλον τετραγωνίζειν, ἐστὶ τὰ ἑκὶ κύκλου χωρίω, ἥτις ἐμβαδῶ, ἴσον  
διθύγραμμον διεῖν.

V.

Circulum quadrare, est circuli areæ æquale recti-  
lineum inuenire.

AITHMATA.

A.

Ἡτέρω λαβεῖν τὸ μήκος, ὅτι διὰ διθείας ἀπίεσαι κύκλος ἀποτεμένε),  
διὰ δὲ ἐν αὐτῶν σημείοις, ἀφ' ἑπὶ κινεῖσθαι ἐπ' αὐτῆς ἕξασθαι, ἔπι τὸ αὐτὸ  
ἀποκατασταθεῖς.

C 2

POSTV-

I.

Impetrandum sit, sumere longitudinem, quam à recta interminata circulus abscindit, à signo, quod in ea est, à quo super ipsa moueri cæperat ad idem reuolutus.



B.

Επι τῶν σειρῶν τὰς Ἐπιφανείας λαβεῖν.

I I.

Prætereà solidorum superficies sumere.

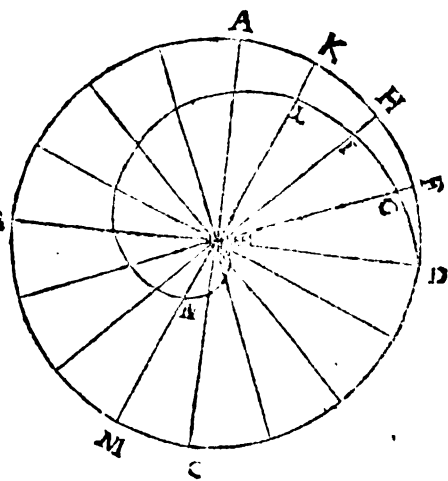
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α. Περὶ ἄλλου.

Περὶ τῶν δοθεισῶν διθῆϊων πεπερασμῶν Ἐλικά τεταγμῶν γραΐσαι.

PROPOSITIO I. Problema.

Circa datam rectam terminatam Volutam luxatam describere.

CIRCA *rectam* datam *terminatam* BD *bifariam diuisam* in E *descriptus* est circulus ABCD: cuius *quadrantibus peripheria diuisis quadrifariam*, erit *totam peripheria ABCD* *diuisa in partes XVI*, quales sunt DF, FH, HK, & ita deinceps: ad *quarum sectionum signa connexis rectis* è centro E, *totus circulus diuisus* erit in XVI *scalpra*. *Fam si per aequalia incrementa, & decrementa in ipsis connexis lineis spatia su-*



d ++++++

mantur

mantur, per definitionem III, poterit quadam Helix circa ipsa describi spatia. Si igitur recta ED, centro E manente immobili, D signum intelligatur in temporis aquabili spatio similes partes aut similia interualla moueri in recta ED, quot partes aut interualla idem D percurrit in peripheria DABC: sane quando D à sexdecim partibus peripheria ABCD abstulerit unam, eodem tempore idem D à recta ED totidem partes abstulerit. Consequenter cum à peripheria dua sextadecima ablata fuerint, totidem à recta ED abstulerit signum D. Sit d equalis ipsi ED diuisa in sexdecim equalles partes, per IX sexti. A recta igitur EF auferatur GF, una videlicet sextadecima recta d, per III primi. Eodem modo ab EH auferantur IH dua sextadecima, nempe LK: & ita deinceps decrescendo. Manifestum est, eodem tempore D percurrisse omnes sextadecimas recta ED, in quo tot similes partes percurrerit in peripheria ABCD: ac per XV quinti elementi, cum percurrerit peripheriam DF, percurrerit quoque interuallum GF in recta ED: cum autem peripheriam DFG peregerit, una quoque opera peregerit interuallum IH in eadem recta ED: denique cum totam peripheriam ABCD per incrementa sextarumdecimarum absoluerit, idem fecerit quoque in rectis adiunctis, per interualla conuenientia. Quare erunt interualla per incrementa & decrementa in lineis adiunctis sumpta, quod Græci dicunt, κατ' αὐξάνουσαν. Habemus igitur interualla, à quorum signis peripheris continuari possunt, per definitionem III. Sumpto igitur interuallo DG, tanquam basi, super ipsa basi intelligatur situm triangulum isosceles, cuius unum crus sit aquale quindecim sextisdecimis recta d, nempe ipsi EG. Et centro quidem vertice ipsius trianguli isoscelis, interuallo autem ipsa EG, describatur peripheria GD. Eodem modo super basi IG triangulo isoscele constituto, cuius latus sit aquale XIII sextisdecimis sumptis ex recta d, id est sit aquale recta EI, centro vertice eius trianguli, interuallo autem ipsa EI, describatur peripheria IG: & ita deinceps, donec ad centrum E peruentum fuerit: quod quidem centrum Archimedes principium vocat, D autem finem, respectu

C 3

scilicet





scendens signabit rectam  $BM$ , id est rectas ei aequales  $BG, BH, BI$ , in punctis  $R, S, T$ . Sectis rectis  $BN, QO$  quadrifariam, recta adiuncta sectionum signis secantur etiam in punctis  $X, Y, Z$ , eadem utiq. ratione, qua reliqua quadrati  $BP$ . Deinde quemadmodum antea in ordinata Helice, basi  $MR$  constituto triangulo isoscele, cuius alterutrum crus sit aequale semidiametro  $BM$ : centro vertice ipsius trianguli, intervallo autem recta  $BM$ , describatur peripheria  $MR$ : & similiter reliqua peripheria eodem intervallo continuentur super basibus  $XY, YZ, ZN$ . Quare necessario eveniet, ut trianguli isoscelis super basi  $T, X$  constituti vertex sit in semidiametro producta in puncto  $f$ : ita ut non à signo  $T$ , in signum  $v$ , & ab  $v$ , in  $T$ , sed à  $T$  in  $x$  per punctum  $v$  continuanda sit peripheria  $TVX$ . Ergo  $v$  est finis volute Dinostrati  $MRSTV$ , aut ipsius  $NZYXV$ . Qua nihil aliud est, quam dimidium volute delumbata. Quod erat faciendum.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

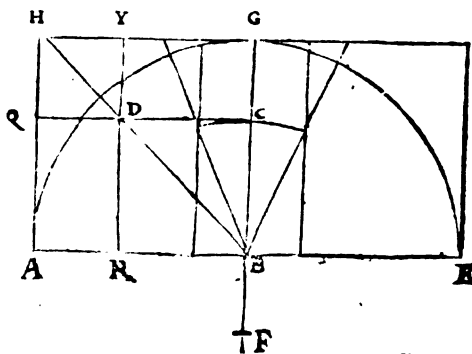
IGITUR munita est nobis via finem volute Dinostratez deprehendendi, quod tamen fieri posse negabat Sporus Nicenus. Nam ex peripheria quadrantis  $QH$   $MC$  abscissa quarta parte  $QI$ , & recta  $T$  adiuncta ad signa quadrifarie sectionis in parallelis  $BM, QP$ , à signo sectionis ambarum  $T$ , in signum  $f$ , diuaricetur circinus intervallo semidiametri  $bQ$  & centro  $F$  describatur peripheria  $TVX$ . &c.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Γ. Θεώρημα.

Τῆς ἐκ τῆς κέντρως διαυρεθείσης ὑπὸ τῆς τρισεπτακάτης ἑλικῆς περιεττο τὸ ἔλασσον τμήμα ἐστὶ ἀλογὸν γραμμῆν ἢ λεγομένην ἀποτομήν.

PROPOSITIO III. Theorema.

Semidiametri diuisi per limitem volute luxata minus segmentum est linea irrationalis, quæ dicitur Apotome.

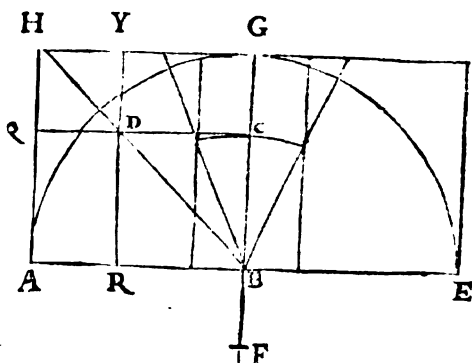


Semidiametri  $BG$  in semicirculo  $AGE$  diuisa inaequaliter in puncto  $C$ , per finem volute delumbata, ex

antece-

antecedente Scholio, minus segmentum esto CG. Aio ipsum segmentum CG esse lineam irrationalem, que dicitur Apotome. Absoluto rectangulo EH, erit AG quadratum. Agatur diagonia BH. Pro-

ducta semidiametro GB in partes F, esto BF equalis duabus quintis ablati ex BG, per IX sexti. ex recta autem BA abscindatur BR equalis media proportionali inter BF, BG, per XIII sexti. Sunt vero recta BF, BG, ex constructione, longitudine com-

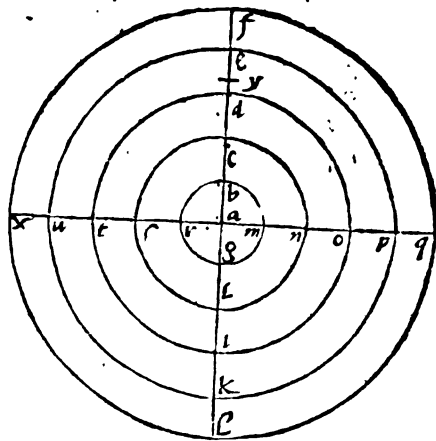


mensurabiles. Ergo recta BR est ipsi commensurabilis, utpote cum sit potentia pñrñ, per XX decimi. Sed quia ut longitudo BF ad longitudinem BG, ita potentia BF ad potentiam BR, & potentia BR ad potentiam BG, id est BA, per Coroll. XX sexti: est autem BF ad BG, ut duo ad quinque, ex constructione, hoc est, ut numerus quadratus ad numerum non quadratum: Ergo & quadratum BF ad quadratum BR, & quadratum BR ad quadratum BG, id est, BA, rationem habent, quam numerus non quadratus ad numerum non quadratum. Igitur per finalem partem IX decimi, quadratorum illorum latera BF, BR, BA sunt longitudine inter se incommensurabilia, & ideo tantum potentia commensurabilia. Cum igitur BA sit pñrñ longitudo (esto enim expositarum partium quinque, ut iam dictum est) BR autem sit eidem BA ostensa longitudine incommensurabilis, potentia vero tantum commensurabilis: erit BR Apotome, per LXXIII decimi. A signis C, R agantur recta CQ, RY rectis AB, AH parallela, occurrentes rectis HA, HG in punctis Q, Y, secantes se in puncto D. Quare CD, BR, item BC, RD erunt aequales ex constructione, adiuuantibus nempe XXXIII, XXXIII primi. Sed angulus CBD in triangulo DCB est semirectus, propter diagoniam BH, in quadrato AHGB, per XXXIII primi. item angulus C rectus ex constructione. Quare reliquus CDB est semirectus, per XXXII primi, ac per sextam eiusdem latera CD, CB aequalia. Sed CD iam erat aequale ipsi BR. Duae igitur CB, BR eidem CB sunt

CB sunt aequales. Inter se igitur erunt aequales, per primum Pronunciatum. Et proinde rectangulum BD est quadratum circa diametrum BA in quadrato ABGH. Quare  $\mathcal{E}$  DH erit quadratum circa eandem diametrum, per XXIII sexti. Sed BR ex BA, hoc est BG, abscindit Apotomen. Erit igitur CG illi aequalis Apotome. Quod erat demonstrandum.

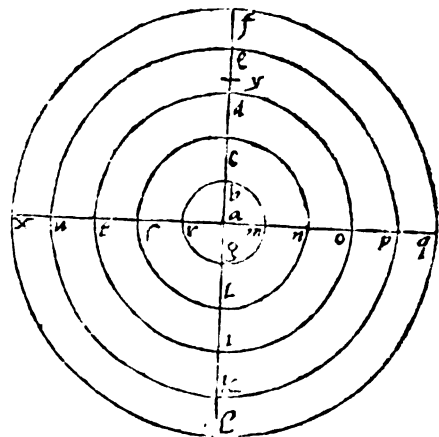
A L I T E R.

ESTO circulus fxlq, cuius centrum a, diametrus fl, descriptus interuallo recta af, qua sit aequalis recta BG, sitque secta in y, in rationem segmenti BC ad totam BG.  $\mathcal{E}$  propterea recta ay est aequalis ipsi BC. Erit ergo ay  $\pi^{\text{e}} \text{eg} \text{e} \text{t} \text{e} \text{d} \text{ix} \mathcal{C}$ . Secta semidiametro quintufariam in signis b, c, d, e, centro eodem a, interuallo ab, bc, cd, de, describantur circuli, qui quidem erunt paralleli, quorum diametri excedunt sese excessu aequabili, nempe interuallo semidiametri ab, qua minima est diametrorum. Secet diametrus xq diametrum priorem fl normaliter. Qualium duum est longitudo ab, talium decem est longitudo af.  $\mathcal{E}$  propterea quadrata ab omnibus diametris sunt inter se commensurabilia, per VIII,  $\mathcal{E}$  IX definit. decimi. Ergo  $\mathcal{E}$  omnes circuli erunt inter se commensurabiles, per II duodecimi. quin  $\mathcal{E}$  periphæria erunt commensurabiles. Nam circulus fxlq, ad circulum brgm, est ut quadratum lf ad quadratum gb: hoc est, vice quintuplus est ipsius circuli brgm, cum longitudo fl longitudinis gb sit quintupla,  $\mathcal{E}$  periphæria fxlq periphæria brgm erit quintupla. Quia igitur ut bg ad lf, ita fqlx ad bmgr,  $\mathcal{E}$  ut fl ad bg, ita af, ad ab, per XV quinti: ergo per XI eiusdem, erit ut af ad ab, ita fqlx ad bmgr. Sed per eandem XV, ut est fqlx ad bmgr, ita periphæria fq ad periphæriam bm. Ergo ut af ad ab, ita periphæria fq ad periphæriam



D riam

riam  $bm$ . Eodem modo possumus demonstrare peripheriam  $nc$  ad peripheriam  $qf$  esse, ut  $ac$  ad  $af$  ἔστι ἀνάλογον, ut  $nc$  ad  $ac$ , ita  $qf$  ad  $af$ , ἔστι ἀνάλογον, ut  $ac$  ad  $nc$ , ita  $af$  ad  $qf$ . Sed ut  $af$  ad  $qf$ , ita ex hypothesis Demonstrati, hoc est ex natura ipsius voluta delumbata, erit  $ay$  ad  $af$ . Ergo per  $x$  quinti, ut  $ac$  ad  $nc$ , ita  $ay$  ad  $af$ . Et quia erat ut  $ac$  ad  $af$ , id est, ut duo ad quinque, ita  $nc$  ad  $qf$ : erit  $nc$  ad  $qf$ , ut duo ad quinque. Rursus rectangulum sub  $ac$ ,  $af$  ad quadratum  $af$  est, ut  $40$  ad  $100$ , id est, ut duo ad quinque. Ergo quadratum  $af$  applicatum ad quinque maiora, quam est longitudo  $af$ , faciet latitudinem duo ipsis quinque commensurabilia per  $xxi$  decimi. Sed idem quadratum  $af$  ad  $qf$ , qua est maior, quam longitudo  $af$ , applicatum, facit latitudinem segmentum  $ay$ , per hypothesis Demonstrati, hoc est per ipsam naturam voluta. Ergo  $ay$  sunt duo commensurabilia ipsis quinque  $qf$ . Igitur  $ay$  ἔστι  $nc$  ambo sunt duae quintae de quinque partibus ipsius  $qf$ . Quare per  $vii$  pronunciatum  $ay$  ἔστι  $nc$  sunt equalia. Et quia erat ut  $ac$  ad  $nc$ , ita  $ay$  ad  $af$ : erit ut  $ac$  ad  $ay$ , ita  $ay$  ad  $af$ . Et propterea  $ay$ , id est  $bc$ , est media proportionalis inter  $af$ , id est ei equalem semidiametrum  $bg$ , ἔστι  $ac$ , id est duas quintas ipsius  $af$ , vel ipsius  $bg$  illi equalis. Reliqua ut supra, ἔστι. Quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ. Θώρημα.

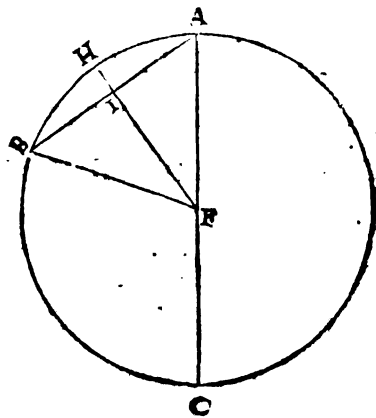
Εάν ἐν κύκλῳ διθείᾳ πῆ διαὶ ἑ κέντρῳ περιφέρειάν πῆα δίχα τέμῆ, καὶ τῶ ὑπ' αὐτῶ ὑποτείνῃσαι δίχα τεμῆ. καὶ ἐάν ἐν κύκλῳ διθείᾳ πῆ διαὶ ἑ κέντρῳ διθείᾳ πῆα ὑπὸ περιφέρειάν πῆα ὑποτείνῃσαι δίχα τέμῆ, ἔστι ἀναλλομήν αὐτῶ περιφέρῃαν αὐτῶ δίχα τεμῆ.

PROPO-

## PROPOSITIO IIII Theorema.

Si in circulo recta quædam per centrum acta peripheriam quandam bifariam secuerit, etiam rectam, quæ eam subtendit, bifariam secabit. Et si in circulo recta quædam per cætrum acta rectam quandam, quæ peripheriam quandam subtendit, bifariam secuerit, ea producta etiam peripheriam ipsam bifariam secabit.

In circulo  $AHBC$ , cuius centrum  $F$ , peripheriam  $HAB$ , quam subtendit recta  $AB$ , secet bifariam recta  $FH$ . Aio etiam subtendentem  $AB$  ab eadem  $FH$  secari bifariam. Connectatur recta  $FB$ . Cum periphæria  $BH$ ,  $HA$ , ex hypothesi sint æquales, erunt  $\angle$  anguli  $BFH$ ,  $AFH$  æquales, per  $XXVI$ , aut  $XXVII$  tertij.



Rursus cum latera  $FI$ ,  $FB$  trianguli  $FIB$  sint æqualia lateribus  $FI$ ,  $FA$  trianguli  $FIA$ ,  $\angle$  anguli illis contenti æquales: erit  $\angle$  basis  $IB$  basi  $IA$  æqualis, per  $III$  primi. Bifariam igitur diuisa est recta  $BA$  in puncto  $I$ , à recta  $FI$ . Quod erat prius.

Rursus secet bifariam recta  $FI$  rectam  $AB$ . Erunt igitur anguli ad  $I$  recti, per  $III$  tertij. Aio peripheriam  $AHB$ , qua ab ea subtenditur, ab eadem  $FI$  producta ad  $H$ , bifariam quoque secari. Cum enim latera  $IB$ ,  $IF$  trianguli  $IFB$  sint æqualia lateribus  $IA$ ,  $IF$  trianguli  $IFA$ ,  $\angle$  anguli contenti sub iis æquales, erunt anguli  $IFB$ ,  $IFA$ , vel  $AFH$ ,  $BFH$  æquales. Quare per  $XXVI$  tertij periphæria  $HB$ ,  $HA$  sunt æquales. Periphæria igitur  $AHB$  bifariam secatur in  $H$  à recta ipsam subtendentem  $AB$  bifariam secante in  $I$ . Quod erat posterius. Ergo si in circulo, &c. Quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

PRIOR pars huius Theorematis constat etiam ex  $x$  tertiidecimi Elementi: in qua demonstratur, rectam ex centro, quæ peripheriam Pentagoni bifariam secat,

D 2

etiam

etiam latus ipsius pentagoni, quod eam subtendit, bifariam secare. Idem etiam aliter demonstrat Hypsicles Alexandrinus propositione prima prioris Elementi sui τὸ συγκείμενος δωδεκάεδρου ἑξήκοντάεδρου : quod est ordine quartumdecimum Elementum Geometricum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε. Θεώρημα.

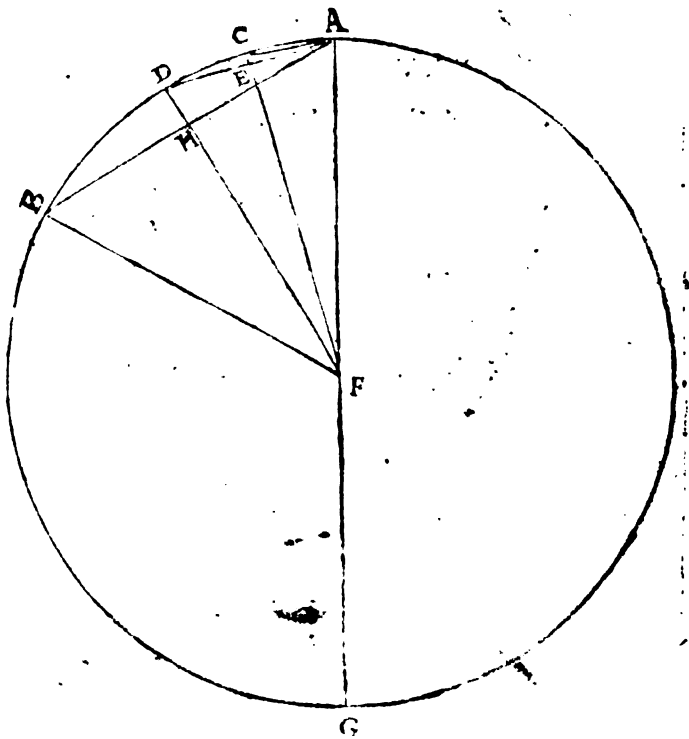
Ἡ ἑξήκοντάεδρου περιμέτρος ἔστω εἰς κύκλον ἐγγεγραφομένη μείζον διὰ τὸ ἑξήκοντα περιμέτρον. Καὶ ὅσῳ ἐφεξῆς πλόνων πλῆθῶν γῆν τὸ πολυγώνιον, τὸ εἰς κύκλον ἐγγεγραφομένον, τόσῳτα ἢ ἑξήκοντα πολυγώνου περιμέτρον μείζον τὸ ἑξήκοντα περιμέτρον διωθήσεται.

PROPOSITIO V. Theorema.

Ambitus Dodecagoni circulo inscribendi plus potest, quam circuli ambitus. Et quanto deinceps plurium laterum fuerit Polygonum circulo inscribendum, tanto plus poterit ambitus Polygoni, quam ambitus circuli.

Ostendendum est, maiorem esse potentiam ambitus Polygonorum circulo inscriptorum à Dodecagono deinceps, quam sit potentia ambitus circuli. Et quia constat perimetrum circuli esse minorem unius ἑξήκοντα sextarum decimarum diametri (sane Archimedes ponit minorem, quam  $\frac{10}{16} \frac{2}{7}$  diametri) nos quoque

ponamus eam non excedere  $\frac{11}{16}$  longitudinis diametri. Si enim diameter fuerit expositarum partium XVI, una septima erit minor quam  $\frac{1}{16}$ . Proinde triplum longitudinis diametri cum  $\frac{1}{16}$ , hoc est  $\frac{11}{16}$  lon-



$\frac{11}{16}$  longitudinis diametri, erunt maiores, quam perimetris circuli. His ita positus, peripheria ACDBG circuli AG, cuius centrum F, esto vicesima quarta pars AC, duodecima ACD, sexta ACDB. quas subtendant AC, AED, AHB. Connectantur recta EB, FC, FD. quarum FC secet rectam AD in E. AB autem secetur in H a recta FD. Et quidem peripheria BDCA peripheria DCA, & peripheria DCA peripheria CA dupla est. In circulo autem semper maior ratio est peripheria ad peripheriam, quam subtendentis ad subtendentem, ut demonstrat Ptolemaeus libro primo magni operis. Ergo maior erit ratio peripheria BDCA ad peripheriam DCA, quam recta BHA ad rectam DEA. Proinde recta BHA ratio ad rectam DEA minor est dupla. Hoc est DEA potest plusquam dimidium BHA. Porro triangulum FAB est aequilaterum, per XV quarti, & FH secat BHA bifariam, per priorem partem antecedentis. ideo anguli ad H sunt recti, per III tertij, & recta FH est  $\alpha\delta\epsilon\zeta\theta$ . Per XI quartidecimi, ex traditione Campani, qualium quatuor erit potentia lateris FB, talium trium erit potentia  $\tau\alpha\delta\epsilon\zeta\theta$  FH. Esto longitudo diametri AG expositarum partium XVI. Qualium igitur 64 erit potentia semidiametri FA, hoc est latus Trigonis isopleuri FAB, talium 48 erit  $\eta\alpha\delta\epsilon\zeta\theta$  FH. Cuius latus fuerit  $6\frac{12}{11}$  fere. Quae si de longitudine FD detrahantur, remanebit longitudo recta HD  $1\frac{1}{11}$  fere, irrationalis linea, qua dicitur  $\delta\alpha\theta\epsilon\iota\eta$ , per LXXIII decimi, ut supra etiam propositione III demonstratum est. Quia igitur recta FD peripheriam BDCA secans bifariam in D, subtendentem quoque BA bifariam secat in H, ut iam ostensum est, & angulus DHA est rectus: erit, per XLVII primi, quadratum DA quadratis DH, HA aequale. Et quia DA est latus Dodecagoni, ambitus Dodecagoni plus poterit, quam duodecies HA, hoc est, quam triplum diametri AG, duodecies quadrato  $1\frac{1}{11}$ , hoc est 13 integris fere potentialibus, quorum latus longe maius est, quam  $\frac{1}{16}$  diametri. quae composita cum triplo longitudinis, maiora erunt, quam  $\frac{11}{16}$  diametri. Maior est igitur ambitus dodecagoni, quam  $\frac{11}{16}$  diametri: ideo longe maior, quam peripheria ACDBG. Rursus quadratum lateris  $1\frac{1}{11}$  recta HD sunt  $\frac{126}{11}$ , quae composita cum quadrato

D 3.

HA effi-



HA efficiens quadratum DA  $17 \frac{47}{169}$ , per XLVII primi, quod angulus

DHA sit rectus, ut iam ostensum est. Qua-

dratum igitur EA est  $\frac{710}{169}$ , (nēpe quarta pars quadrati DA duplo ipsius EA) Qua-

dratum autem recta CA, plus potest, quam quadratum EA, quadrato EC; per eandem XLVII

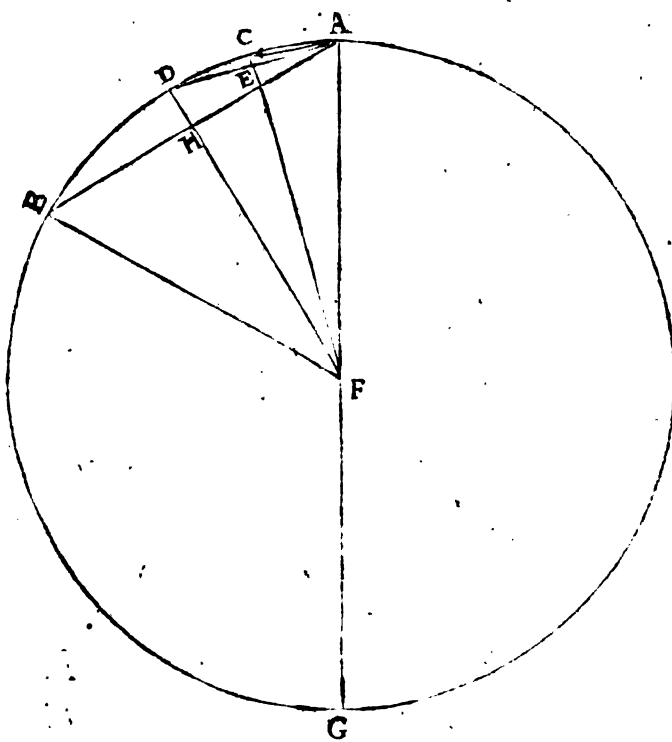
primi: quod scilicet recta FC peripheriā DCA bifariā in C diuidens, rectam quoq. DA bifariam diuidat in E, per

antecedentem, & ideo ad angulos rectos. Triangulum itaque CEA est orthogonium. Sed quadratum EA est  $\frac{710}{169}$ , cuius latus paulo maiusculum, quam  $2 \frac{7}{13}$ . Quare vicesies quater plusquam  $2 \frac{7}{13}$  erunt plusquam, aut sane non minus, quam  $\frac{61}{8}$  ambitus nempe  $\frac{1}{8}$  τριωσάσσο-κωνειροειδα γώνης, maior utique ambitu circuli circumscribentis, qui tantum positus erat  $\frac{11}{16}$ . Et quo plura fuerint latera polygoni, eo longe maior per numeros reperietur ambitu circuli circumscribentis ambitus polygoni inscripti. Quod erat demonstrandum.

## Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Cum igitur, ut iam ostensum est, quo plura fuerint latera Polygoni inscripti, eo maior reperitur per numeros ambitus eius, quam circuli circumscribentis peripheria frustra per numeros Archimedes conatus est peripheriam circuli inuestigare in polygono permultorum laterum circulum circumscribente: cum polygonum circumscribens sit proculdubio longe maius polygono simili inscripto. quod quidem polygonum inscriptum ostensum est per numeros maiorem ambitum habere, circulo suo circumscribente. Maiorem igitur ambitum habebit polygonum circumscribens: & ideo latius peccatum ab eo.

Nobile est hoc paradoxon in Geometria, & ipsi, ut iam tetigimus, Archimedi non animaduersum. Alioquin non dubium est, quin peripheria sit maior subtendente sua. Sed per numeros aliter deprehendetur. quo magis miror Mechanicos, qui



qui globis superficies Cosmographicas inducunt. Nam ad longitudinem perimetri circuli assumunt latera omnia, id est totum ambitum Dodecagoni maximo circulo sphaerae ipsius inscripti. Non enim video, quomodo perfecte id obire possint. & non leuiter miratus sum, cum haec praecipere legissem à magno Daniele Barbaro. Nam de vulgo nihil mirum.

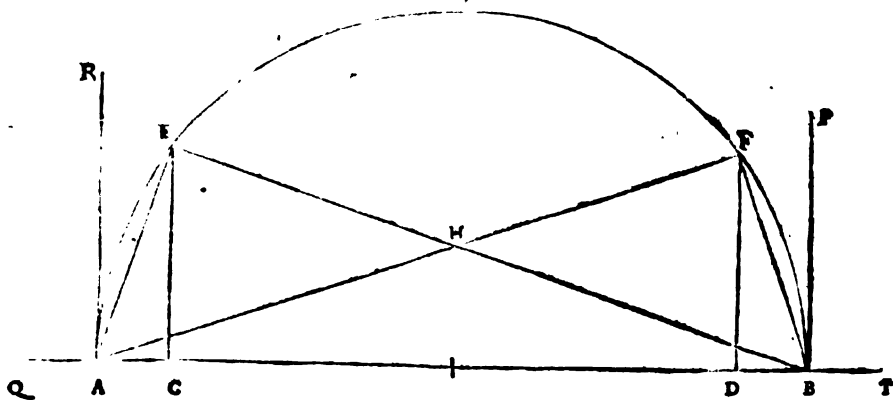
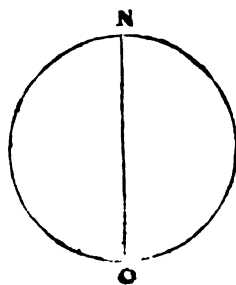
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Θεωρημα.

Ἡ Ἐ κύκλος περιμέτρου διπλάσιον διώα) τ̄ διαμέτρου.

PROPOSITIO VI. Theorema.

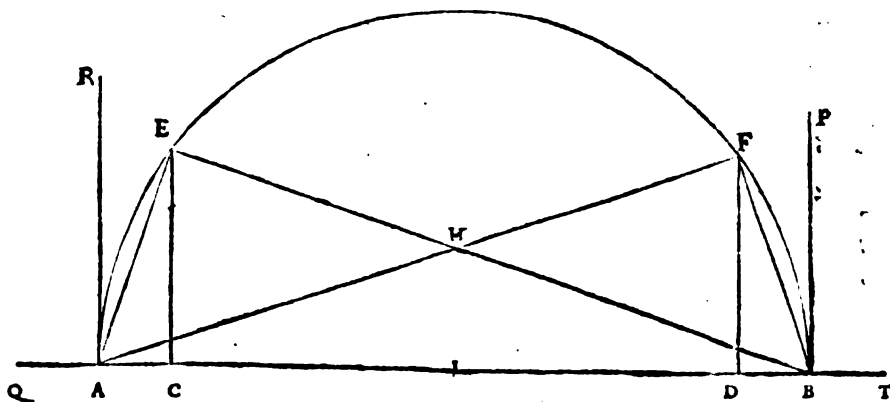
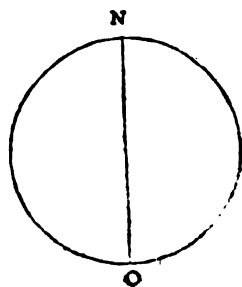
Quadratum ab ambitu circuli decuplum est quadrati à diametro.

*Circulus NO abscindat de linea infinita QT rectam AB, incipiens super ea moueri ab eo puncto, quod in eo est, donec ad idem reuoluatur, per prius Postulatum huius. Recta igitur AB est aequalis perimetro eiusdem circuli propositi NO. Semicirculo AEFB super recta AB descripto accommodetur lon-*



*ginitudo EB tripla longitudinis NO, per primam quarti. iungatur recta EA. Deinde à signo E demittatur recta EC perpendicularis ad AB, per XII primi. Rursus de eadem recta AB abscindatur pars decima DB, per IX sexti. Postremo à puncto D excitetur DF ipsi AB perpendicularis, per XI primi: & connectantur recta FA, FB. Per Coroll. VIII sexti recta BF est media proportionalis inter AB, BD. Ergo per Coroll. XIX, aut XX sexti, ut longitudo AB ad longitudinem BD, ita quadratum AB ad quadratum BF. Sed longitudo AB est de-*

est decupla longitudinis  $BD$  ex constructione. Ergo quadratum  $AB$  est decuplum quadrati  $BF$ . Quare per XLVII primi, quadratum  $AF$  est nonuplum quadrati  $BF$ . hoc est, longitudo  $AF$  est tripla longitudinis  $FB$ , per IX decimi. His ita demonstratis, excitentur  $AR, BP$  perpendiculares ipsi  $AB$ . ac propterea parallela erunt rectis  $CE, DF$ . Itaque angulus  $RAE$  angulo  $AEC$ : & angulus  $PBF$  angulo  $BFD$  erunt aequales, utpote alterni. Item anguli  $EHA, FHB$ , per XV primi aequales. In triangulis vero  $EAH, FBH$ , anguli  $AEH, BFH$ , aequales, quia



recti sunt, per XXXI tertij. Igitur reliquus  $EAH$  reliquo  $FBH$  aequalis. Quibus ablatis ab aequalibus  $RAB, PBA$ , remanent  $RAE$ , hoc est,  $AEC, FAB$ : item  $PBF$ , id est  $BFD, EBA$ , aequales. Sed anguli  $AEC, ABE$  sunt aequales: item  $BFD, FAB$ : propterea quod triangula  $AEC, AEB$ : item  $BFD, BFA$  sunt aquangula, per VIII sexti. Quare  $FAB, EBA$  sunt aequales: quemadmodum etiam anguli  $AEB, BFA$ , in triangulis  $ABE, BAF$ . Reliquus ergo  $EAB$  reliquo  $FBA$  aequalis, & triangulum triangulo aquangulum. Cum igitur ambo triangula  $ABE, BAF$  habeant latus commune  $AB$  oppositum aequalibus angulis  $AEB, BFA$ , idemque adiacens aequalibus angulis  $EAB, FBA$ : ergo per XXVI primi, reliqua latera  $AF, FB$  reliquis lateribus  $BE, EA$  sunt aequalia. Sed longitudo  $AF$  est tripla longitudinis  $FB$ , ex constructione. Ergo consequenter  $BE$  tripla erit longitudinis  $EA$ . Atqui eadem  $BE$  est tripla longitudinis  $NO$ , ex constructione. Ergo per IX quinti,  $AE, NO$  sunt

sunt aequales. Ideo quadratum AB, hoc est quadratum à peripheria circuli NO, est decuplum quadrati à diametro NO. Quod erat demonstrandum.

## A L I T E R.

Ea est natura voluta luxata, veluti demonstravit Dinostratus, ut semidiameter circuli sit media proportionalis inter maius segmentum, quod fit à fine voluta (quae vocatur cōgruens) et quadrantem perimetri circuli. Sed cōgruens ipsa ostensa est supra propositione III, esse media proportionalis inter ipsam semidiameterum, et duas quintas eius. Esto circuli propositi NO diameter expositarum partium viginti. Duae quinta semidiametri erunt quatuor decimae semidiametri. Quadratum vero rectanguli inter quatuor decimas et decem, erunt 40, qualium quadratum à semidiametro sunt 100. Nam ratio 40 ad 100 debet esse, qualis quatuor ad decem, aut duo ad quinque, per Coroll. XIX, aut XX sexti. Ergo tertia proportionalis erit 250, quadrans perimetri, decuplum potentiae quadrantis diametri. Quare sedecuplum ipsorum 250 erunt 4000, quae quidem sunt decupla ipsorum 400, qui est quadrans diametri circuli NO expositarum partium XX. Igitur quadratum à perimetro circuli est decuplum quadrati à diametro. Quod erat demonstrandum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α.

Ex δὴ τέτων φανερόν, ὅτι ὁ λόγος, ὃν τὸ μήκος τῆς περιμέτρου ἔχει πρὸς τὸ μήκος τῆς διαμέτρου, τετραπλασιφερόμενος μείζων ἐστίν.

## COROLLARIUM I.

Ex istis constat, quod ratio, quam habet longitudo ambitus circuli ad longitudinem dimetientis, maior est tripla sesquiseptima.

Nam si, verbi gratia, longitudo diametri fuerit septem partium: qualium potentia diametri fuerit 49, talium 490 erit potentia perimetri: quae quidem maior est, quam 484, quae sunt tantum in ratione tripla sesquiseptima.

E

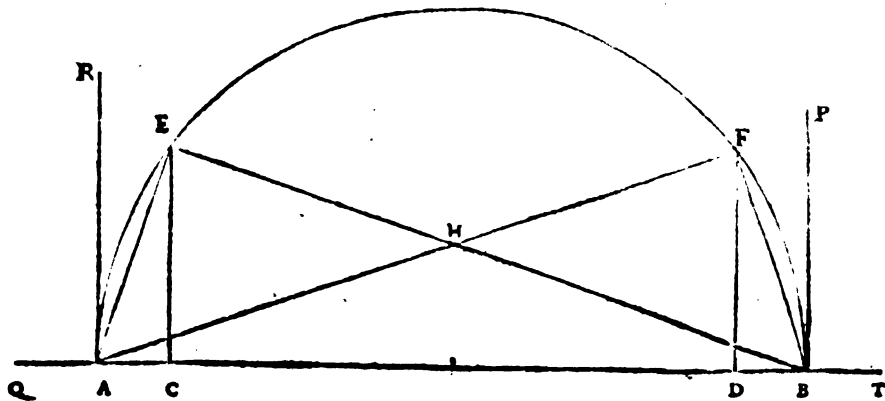
Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β.

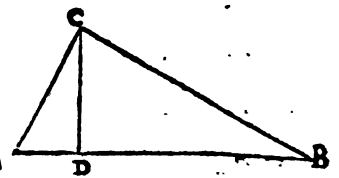
Εκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐν τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, εἰὰν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας καθέλῃται πρὸς τὴν βάσιν ἀχθῆ, τὰ ἀπὸ τῶν τῶν ὀρθῶν γωνίων περιεχουσῶν πλευρῶν τετράγωνα ἀλλήλων εἰσὶν, ὡς καὶ τὰ τῆς βάσεως τμήματα.

COROLLARIUM II.

Ex istis manifestum est, in triangulo rectangulo si à recto angulo ad basim perpendicularis acta sit, quadrata à lateribus rectum angulum continentibus inter se esse, perinde ac basis segmenta.



Nam priore demonstratione, in triangulo rectangulo AFB ostensum est, quadratum ex AF quadrati ex FB esse nonnullum. Sed segmentum AD segmenti DB ex constructione erat nonnullum. Ergo quadrata à lateribus FA, FB angulum F continentibus quadrata perinde sunt inter se, ut longitudines DA, DB. Quod tamen aliter Ἐπισημονικῶς demonstrari potest. In Triangulo rectangulo ABC, à recto angulo C, ad basim AB, demissa perpendicularis CD secet basim ipsam in duo segmenta DA, DB Aio A quadrata à rectis CA, CB rectum angulum continentibus inter se esse, ut longitudines DA, DB, qua sunt segmenta basis AB. Per Coroll. VIII sexti, recta AC est media proportionalis inter AB, AD: re-  
cta au-



Ita autem  $BC$  inter eandem  $AD$ , &  $DB$ . Quare rectangulum sub  $AB, AD$  quadrato ex  $AC$ : rectangulum autem sub  $AB, DB$  quadrato ex  $BC$  sunt equalia. Sed rectangula sub  $AB, AD$ , & sub eadem  $AB, DB$ , sunt inter se ut bases  $DA, DB$ , sub eadem altitudine  $AB$  per I sexti. Quare per XI quinti, quadrata  $AB, BC$ , equalia ipsis rectangulis, sunt inter se, ut  $DA, DB$ . Quod erat demonstrandum.

Possimus & hoc Πόρισμα conuertere ita.

Εὰν τε γὼν γωνίαν πρὸς διὰ δὲ τὰ τέμνεσθαι ἐπὶ τὴν βάσιν τέρμη, τὰ δὲ πρὸ πάντων τῶν τμηθεῖσθαι γωνίαν πρὸς ἑαυτῶν γωνίων τελεγεῖσθαι ἀλλήλοισι ἢ, ὡς πρὸς τὰ βάσεως τμήματα, ἢ μὲν τέμνεσθαι διὰ δὲ τὴν βάσιν πρὸς ὅθεν εἶσθαι, ἢ δὲ τμηθεῖσθαι γωνία, ὅθεν εἶσθαι.

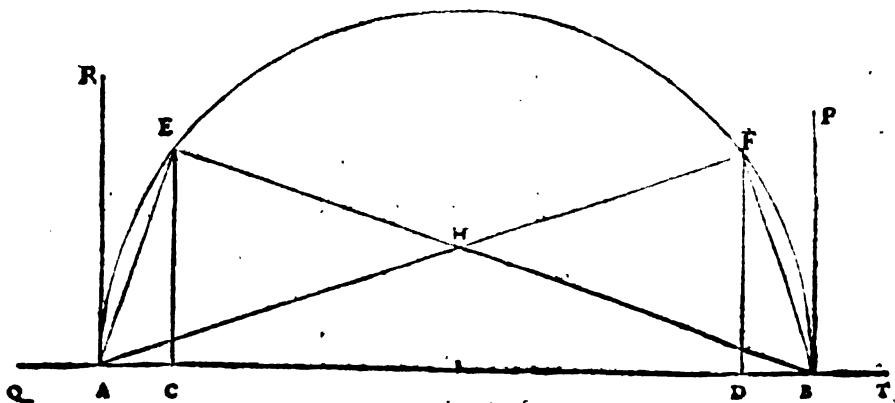
Si Trianguli angulum quendam fecans recta linea fecuerit & basim, quadrata autem à lateribus angulum sectum comprehendentibus inter se fuerint perinde ac basis segmenta, ipsa quidem fecans linea est basi perpendicularis, angulus autem sectus est rectus.

Priore figura, in triangulo  $AFB$ , (consideretur Triangulum  $AFB$  nudum, sine reliquis, quae sunt in figura) recta  $FD$  secans angulum  $F$  secet & basim  $AB$ , in  $D$ : quadrata autem à lateribus  $FB, FA$  angulum  $F$  continentibus, sint inter se, ut segmenta  $DA, DB$  basis  $AB$ . Aio rectam quidem  $DF$  basi  $AB$  esse perpendicularem, angulum vero  $F$  esse rectum. Excitatis rectis  $AR, BP$ , quae sint ad perpendicularum basi  $AB$ , imaginemur à puncto  $F$  anguli  $AFB$ , ad imaginaria puncta  $Q, M$  in rectis  $AR, BP$  sumpta, duas rectas  $FQ, FM$  ipsis  $DA, DB$  tum parallelas tum aequales iunctas esse. Erunt  $QA, MB$  etiam tum parallelas, tum aequales, per XXXIII primi. Quadrilatera vero  $QADF, FDBM$  erunt parallelogramma: & anguli ideo oppositi  $QAD, AFB$ , item  $MBD, DFM$  aequales, per XXXIII primi. Ergo per XXXII eiusdem, adiuvante etiam posteriore parte XXVIII

E 2

primi,

primi, parallelogramma  $QADF$ ,  $FDBM$  sunt rectangula. Et proinde recta  $FQ$ ,  $FM$  ad punctum  $F$  recta ipsius  $DF$  duos angulos duobus rectis aequales, imo rectos, facientes, componunt unam lineam directam perpetuam  $QM$ , ac denique per posteriorem partem XXVIII primi, anguli  $FDA$ ,  $FDB$  sunt recti. Recta igitur  $DF$  basi  $AB$  est perpendicularis, per definit. X. primi Elementi. Quod est prius.



Rursus quia, ex hypothesi, quadrata  $FA$ ,  $FB$  sunt inter se ut longitudes  $DA$ ,  $DB$ , et aut sumpta sunt, ut priore demonstratione, aut data, (nam nihil refert) longitudo quidem  $DA$  expositarum partium IX, longitudo autem  $DB$  unius, necesse est omnino ex hypothesi, quadratum  $AF$  esse nonuplum quadrati  $FB$ , ac consequenter idem quadratum  $AF$  esse nouenarium numerum. Sed quadratum a longitudine  $DA$ , est talium 81, qualesum unius quadratum a longitudine  $DB$ : insuper quadratum  $AF$  potest quadrata  $DA$ ,  $DB$  per XLVII primi. Ergo quadratum  $AF$  est maius quadrato  $DA$ , ac proinde maius, quam nouenarius 81. Sit igitur aequale proximo nouenario 90. Ergo quadratum  $FB$  erit 10, ex hypothesi. Atqui tam 90 est media proportionalis inter  $AB$ ,  $DA$ , X, et IX, quam quadratum  $FB$  inter  $AB$ ,  $DB$ , unum, et decem. Ergo, per Coroll. VIII sexti, Triangulum  $AFB$  est orthogonium, et angulus  $F$  rectus. Vel aliter. Quia quadratum  $AF$  90, potest quadratum simul  $AD$  81, potest et quadratum  $DF$ , per XLVII primi: ergo quadratum  $DF$  est 9. Erit igitur media proportionalis inter  $DA$ ,  $DB$ , per Coroll. XXVI, cum sit ut longitudo  $DB$ , ad longitudinem  $DA$ , unum ad nouem,

novem, ita quadratum DB, ad quadratum DF, unum ad novem. Quare per XIII tertij decimi, descriptus super AB semicirculus AEB, transibit necessario per F. Ideoque per XXXI sexti, angulus F est rectus. Quod est posterius. Ergo ἐὰν περιέγῃς γωνίαν, ἔστω. Quod erat demonstrandum.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

AT Archimedes conatur demonstrare inductione ad impossibile longitudinem perimetri paulo minorem esse supra diametrum tripla sesquiseptima. hoc est potentiam perimetri minorem esse, quam 484, cum scilicet quadratum diametri fuerit 49. Quem errorem satis superior demonstratio refellit. Sed quare hoc sibi & posteritati persuaserit, in Prolegomenis declaratum est. Similis vero absurditas est in XVIII & XIX ἐπιπέδων Archimedis. Porro Ptolemæus in Canone sinuum construendo statuit perimetrum circuli 360 partium, diametrum autem 120: ut necessario una  $\frac{1}{120}$  diametri non sit æqualis vni  $\frac{1}{360}$  perimetri, imo minor. Habet enim ille rationem quadrati semidiametri ad quadratum subtendentis, non autem diametri ad perimetrum. Ex hac methodo sequitur latus hexagoni esse 60 partium, qualium est diameter 120, item peripheriam, quam subtendit, totidem esse, nempe talium 60, non qualium diameter 120 est, sed qualium perimetris 360. Postea itaque perimetro partium 360, quadratum eius erit 129600. Quadratum igitur diametri erit 12960, per ea, quæ antea demonstrata sunt. Latus autem potentia 12960 est minus, quam 114: quam analogiam sequi debent artifices tabularum in construendis sinuum Canonibus. Nam cum ratio quadrati à semidiametro ad quadratum à subtendente habenda sit, longitudo illius ad longitudinem huius deprehendatur per XLVI primi, utendum erit potentia diametri, nempe 12960. Et ita talium erit partium diameter, qualium perimetris. Nam aliter facere ratio diametri ad perimetrum non finit, quamvis methodus Ptolemæi assequitur quod proponit.

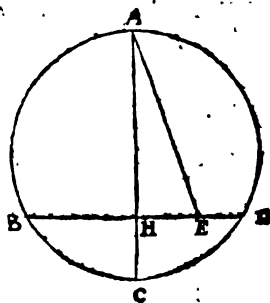
Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ζ. Πρόβλημα.

Κύκλος δοθέντι δίδειν ἴσῳ τῇ αὐτῆ περιμέτρῳ δίδειν.

PROPOSITIO VII. Problema.

Dato circulo, rectam æqualem eius ambitui reperire.

Perimetro, siue ambitui circuli ABCD sit recta æqualis invenienda. Inscribatur ei latus



Trigoni isopleuri BD. Per XII tertijdecimi erit HC quarta pars longi-

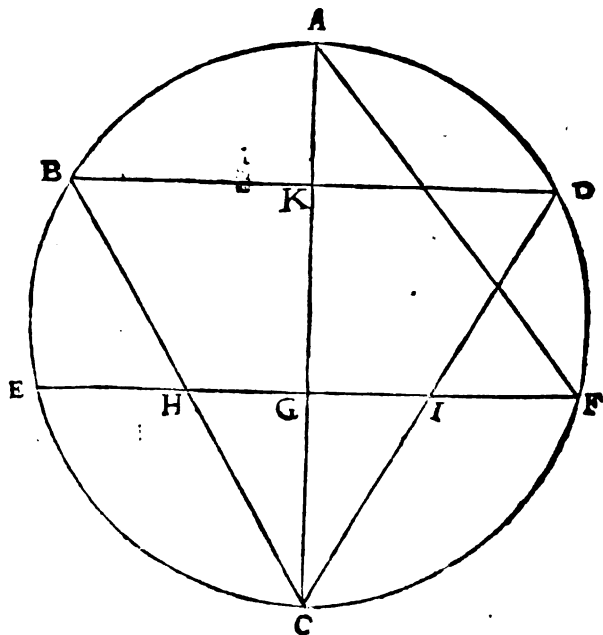


longitudinis  $AC$ . Ex recta  $HD$  abscindatur recta  $HE$  aequalis ipsi  $HC$ . Connetatur recta  $AE$ . Recta igitur  $AH$  erit longitu-

dine tripla recta  $HE$ , potentia autem nonupla eiusdem, per eandem demonstrationem, qua proxime triplum diametri nonuplum potentia diametri demonstrauius. Quadratum autem  $AE$  aequale est quadratis  $AH, HE$ , per XLVII primi. Erit ergo decuplum quadrati  $HE$ . Ideo  $AH$  ad  $HE$  rationem habet, quam triplum longitudinis diametri ad ipsam diametrum. Non enim differt hac demonstratio a superiore. Quare per IIII sexti triangulum  $AEB$  in superiori demonstratione erit aequangulum triangulo  $AHE$ . eritque in illo quidem ut  $BA$  ad  $AE$ , perimetris scilicet ad diametrum, ita in hoc  $AE$  ad  $HE$ . Et alternando, ut perimetris ad  $AE$ , ita diametrum ad  $HE$ . Sed diametrum, hoc est,  $AC$  est quadrupla ipsius  $HE$ , per XII tertidecimi. Ergo perimetris erit quadrupla ipsius  $AE$ . Quare si sumatur longitudo  $FG$  quadrupla longitudinis  $AE$ , habebis rectam aequalem perimetro circuli  $ABCD$ . Quod erat faciendum.

## ALITER.

Circuli  $ABCD$ , cuius diametrum  $AC$ , sit inuenienda peripheria. Trianguli isopleuri inuersi  $BCD$  lateribus  $CB, CD$  bisariam sectis in signis  $H, I$ , agatur per ipsa sectionum signa recta  $EF$ , que parallela erit ipsi  $BD$ , & triangulum  $HCI$  super basi  $HI$ , erit aequangulum, & simile toti



CBD,

CBD, per II sexti. *Qualium autem quatuor est quadratum lateris CB, talium trium est quadratum perpendicularis CK, ut alibi demonstratum est. Esto diameter AC expositarum partium XVI. Qualium igitur 192 est quadratum a latere CB, talium 144 erit quadratum a CK. Sed qualium 192 est quadratum a tota CB, talium 48 erit quadratum a dimidia CH. Et proinde quadratum a perpendiculari CG erit talium 36, qualium quadratum a tota AC est 256, (aut qualium CK dupla ipsius CG est 36.) Ergo AC, & CG habent inter se rationem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & propterea sunt inter se longitudine commensurabiles, per IX decimi. Qualium igitur expositarum partium XVI est longitudo AC, talium CG erit VI: & consequenter talium X reliqua GA. Connectatur recta AF. Aio rectam AF esse quadrantem perimetri ABECFD. Per Coroll. XIX, & XX sexti, ut longitudo GA ad longitudinem GC, ita potentia GA ad potentiam GF: hoc est, qualiter decem ad sex: ita quadratum GA ad quadratum GF. Sed quadratum GA est talium centum, qualium quadratum AC 256. Ergo quadratum GF erit talium 60, qualium 100 est quadratum GA. Quare per XLVII primi, quadratum AF erit talium 160, qualium quadratum AC est 256, hoc est; qualium tota perimetris ABECFD est 2560, per antecedentem. Sed 160 est sextadecima pars potentia 2560, & proinde quarta pars longitudinis extense perimetri. Reliqua, ut supra, &c. Quod erat faciendum.*

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

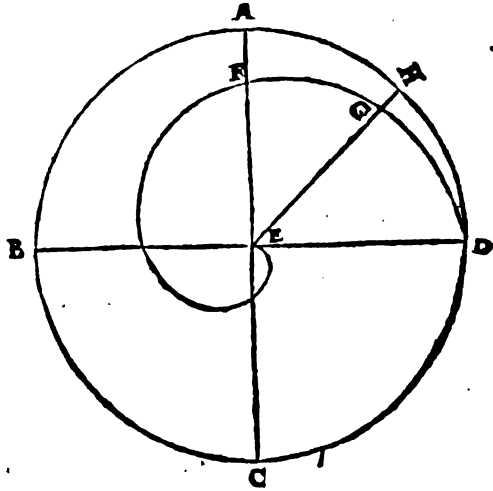
R V R S V S tam hinc, quam ex antecedente, colligitur, quid voluerit Archimedes, cum dixit, perimetrum supra diametrum minorem esse tripla sesquiseptima, maiorem tripla superdecupartiente septuagesimas primas. Esto longitudo diametri partium expositarum, 497. Vna septima erunt  $\frac{71}{497}$ . Vna septuagesima prima, erunt  $\frac{7}{497}$ . Archimedes igitur vult diametrum fore minorem, quam 1562, maiorem quam 1561. Vide, quantum erratur hoc modo. Nam si longitudo diametri fuerit partium 497, quadratum à perimetro erit 2470090. Cuius latus *approximatus* est 1570  $\frac{2049}{3143}$  quod quidem est maius, quam 1562, cum differentia sit  $\frac{8}{497} \frac{2049}{3143}$ .

Περίφρηξις Ἐπὶ ἑὶ κύκλῳ δοθείσῃ ἴσῳ διζείαν εἶρεῖν.

PROPOSITIO VIII Problema.

Peripheriæ in circulo datæ æqualem rectam inuenire.

In circulo ABCD data sit peripheria BAH, cui æqualem oporteat rectam reperire. Ductis diametris AC, BD normaliter sese secantibus, describatur voluta ordinata, EFGD, per primam huius; A principio autem voluta, nempe ab E centro circuli, ad H limitem peripheria, agatur recta EH, secans volutam in puncto G. Per XIII Archimedis εἰ ἐλίκων, ut est ED, id est, EH, ad EG, ita tota perimetrus DCBAHD ad peripheriam HABCD. Recta KM toti perimetro æqualis per antecedentem reperta secetur primum bifariam in signo N, deinde in rationem EH ad EG, in puncto L. Sed ratio EH ad EG est, ut perimetri DCBAHD ad peripheriam HABCD. Ergo ut DCBAHD, ad HABCD, ita KM ad KL. Sed DCBAHD, & KM sunt æquales. Ergo reliquæ HABCD, & KL sunt æquales. A quibus si auferantur æquales DCB, KN, remanebunt æquales BAH, NL, per XIX quinti. Quod erat faciendum.



K

N

L

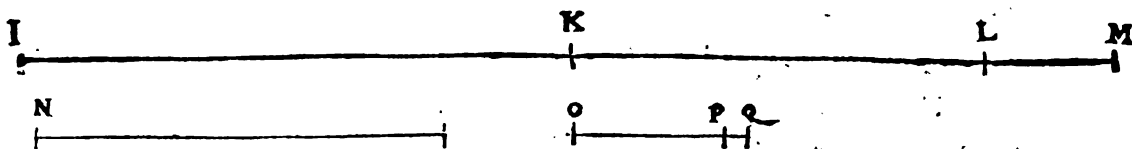
M

Π Ρ Ο-

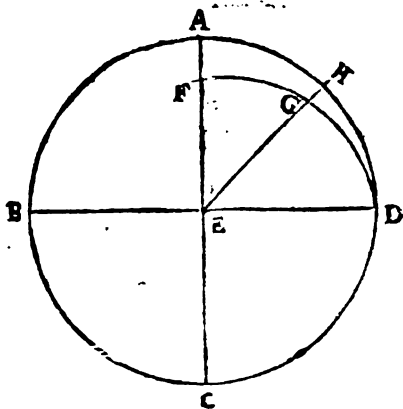
Τῆ ἀδεία δοθείσῃ ἴσως περιφέρειαν ἀρεῶν ἐν τῇ δοθέντι κυκλῷ.

PROPOSITIO IX. Problema.

Rectæ datæ æqualem peripheriam inuenire in dato circulo.

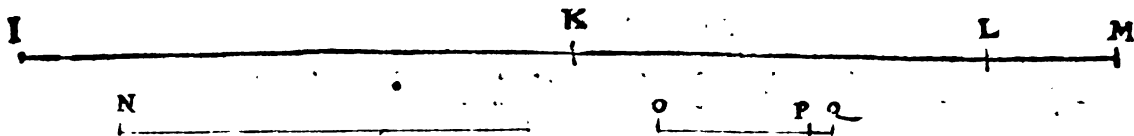


Data sit recta N, cui peripheriam æqualem reperire oporteat in dato circulo ABCD. Estō recta IM perimetris circuli dati, per VII huius: quæ secetur bifariam in K. Recta vero data N minor estō, quam recta KM. Ex ipsa KM abscindatur recta KL æqualis data N. Rursum in circulo ABCD normaliter secent sese diametri AC, BD. Describatur

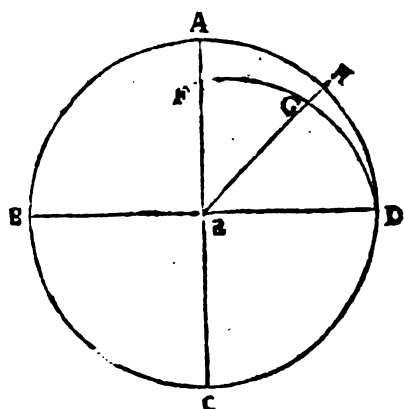


finis Volutæ ordinatæ DGF, per primam huius. Quia enim peripheria congruens rectæ datæ N est minor, quam peripheria BAD ex hypothesis (posita enim est minor, quam recta KM, quæ peripheria BAD est æqualis) cadet eius finis inter A, D. Secetur recta OQ æqualis semidiametro ED, in rationem IL, LM, per X sexti, in signo P. Erit igitur ut IL ad LM, ita OP ad PQ. Quod si centro E, intervallo autem OP describendus esset circulus, is secaret necessario portionem volutæ FGD. Secet in G: & ex centro E, ad signum G ducta, & eiecta ad peripheriam usque AHD, secet eam in H. Aio peripheriam BAH æqualem esse rectæ datæ N. Quia enim per XIII

ἢ ἐλίκῳ Archimedis, est quemadmodum ED hoc est EH, ad EG, ita peripheria tota DCBAHD ad peripheriam HABCD, erit alternando, ut tota EH ad totam DCBAHD, & ablata EG ad ablatam HABCD, ita reliqua GH, ad reliquam HD, ut tota EH



ad totam DCBAHD, per XIX quinti. Sed peripheria DCBAHD sumpta est aequalis IM, & ex constructione est IL ad LM, ut EG ad GH, nempe ut OP ad PQ. Ergo per XI quinti, ut tota DCBAHD ad totam IM, & ablata HABCD, ad ablatam IL, ita reliqua HD ad reliquam LM. Sed KLM sumpta est aequalis ipsi BAHD. Ergo ablati aequalibus LM, HD, remanent aequales KL, BAH. Quod erat faciendum.



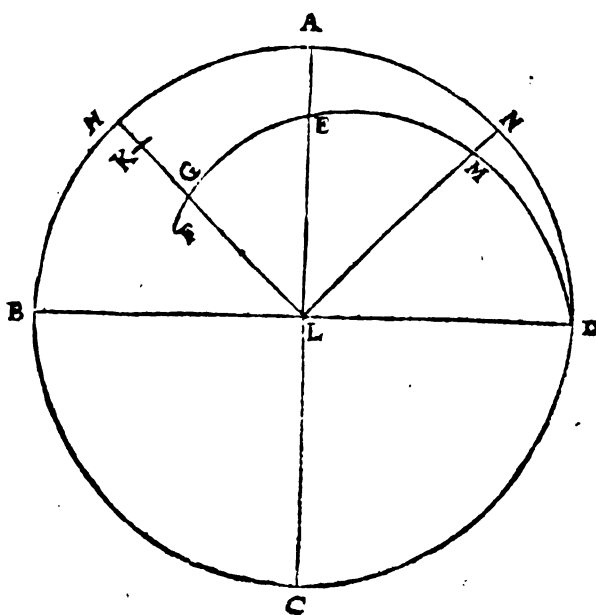
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης περιφέρειας τὸ ὀρθογώνιον μέρϑ' ἀφελεῖν.

PROPOSITIO X. Problema.

A data peripheria imperatam partem auferre.

A peripheria HAD data in circulo ABCD, abscindenda sit pars imperata, puta tertia. Ductis diametris AC, BD se se normaliter secantibus, describatur portio voluta ordinata DEF. A puncto autem H, qui est finis peripherie datae, ad centrum L, agatur recta HL, qua secet portionem voluta in signo G. Arcuta



GH, (qua

GH, (qua est recta LH pars) abscindatur tertia pars KH, per IX sexti. Igitur, ut in proxima propositione demonstratum est, circulus describendus centro L, intervallo LK, secabit portionem voluta in signo quodam. Secet in signo M. Agatur recta LN secans portionem voluta in M, peripheriam autem AND, in N. Quare quia recta LH, LN sunt aequales, & ablata LK, LM aequales, ex constructione: & reliqua igitur KH, MN erunt aequales, per communem sententiam III. Aio ND esse partem imperatam, nempe tertiam peripheria data HAD. Cum enim, ut proxime ostensum est, sit quemadmodum LD, hoc est LH, ad totam perimetrum DCBHAD, ita GH ad HAD, aut MN, ad ND: erit etiam quemadmodum tota FH ad totam HAD, ita MN, hoc est KH, ad ND. Et alternando, ut FH, ad KH, ita HAD ad ND. Et ἀνάπαλιν, ut KH ad FH, ita ND ad HAD. Sed KH est tertia pars ipsius FH. Ergo ND erit tertia pars ipsius HAD. Neque aliter facies, si imperata fuerit septima, aut quinta. Quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Si proponantur duo inaequales circuli, & de alterutrius peripheria partem alterius peripheriae aequalem auferre oporteat, hoc per duas proxime antecedentes efficias. Nam hoc nihil aliud est, quam per proximam, partem imperatam à circulo ablatam à circulo, per IX huius applicare.

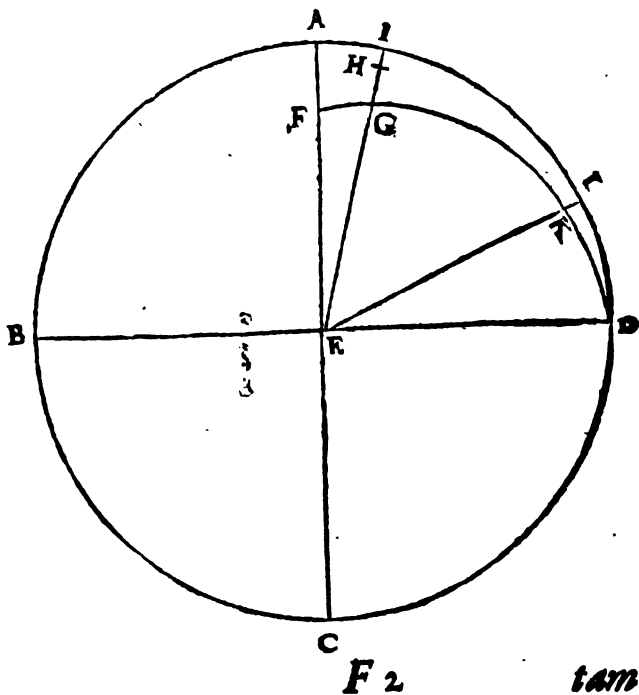
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης γωνίας δι-  
 συγράμμευ τὸ ὀρθογώνιον  
 μέγιστον ἀφελῆν.

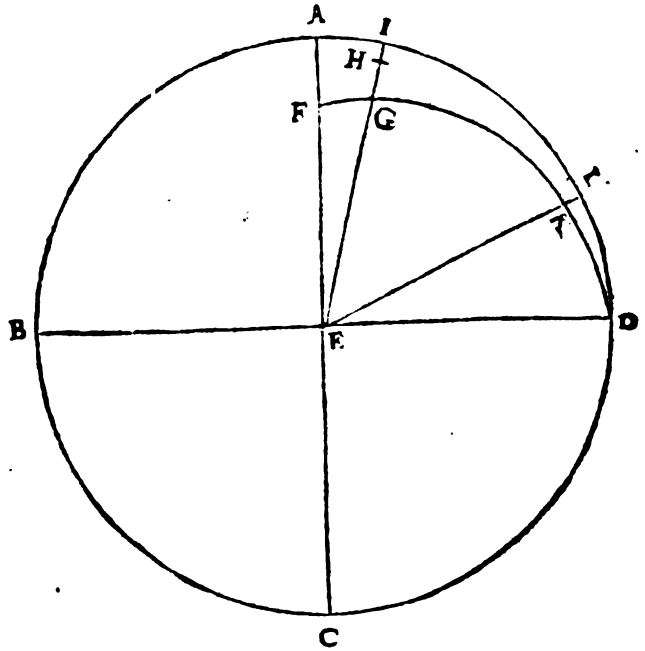
PROPOSITIO XI. Problema.

A dato angulo  
 rectilineo impera-  
 tam partem auferre.

Datus sit angulus qui-  
 cumque rectilineus IED,  
 a quo oportet impera-



tam partem auferre, puta tertiam. Centro E, intervallo quocunque, a rectis IE, DE angulum datum continentibus auferatur peripheria quacunque: aut, quod idem prope est, ut in hac figura, centro E, intervallo EI, describatur circulus ABCD. Continuatam autem diametrum DEB secet æquis ὀρθὰς, alia diametrus AC. Inscribatur in circulo finis voluta ordinata DKGF: quam recta EI secabit in puncto G. Ablata tertia parte HI a recta GI, per IX sexti, intervallo EH circulus describendus secet portionem voluta in signo κ. Connectatur recta EL transiens per signum κ. Per ea, quae in superioribus demonstrata sunt, erit ut GI ad KL, hoc est ad HI, ita peripheria LD, tertia pars peripheriae ILD, ex eadem superiore demonstratione. Sed ut ILD ad LD, ita angulus IED ad angulum LED, per XXXIII sexti. Quare angulus LED est tertia pars imperata ab angulo dato IED ablata. Neque aliter faciendum, si quinta aut septima pars imperata fuerit. Quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ. Θιώρημα.

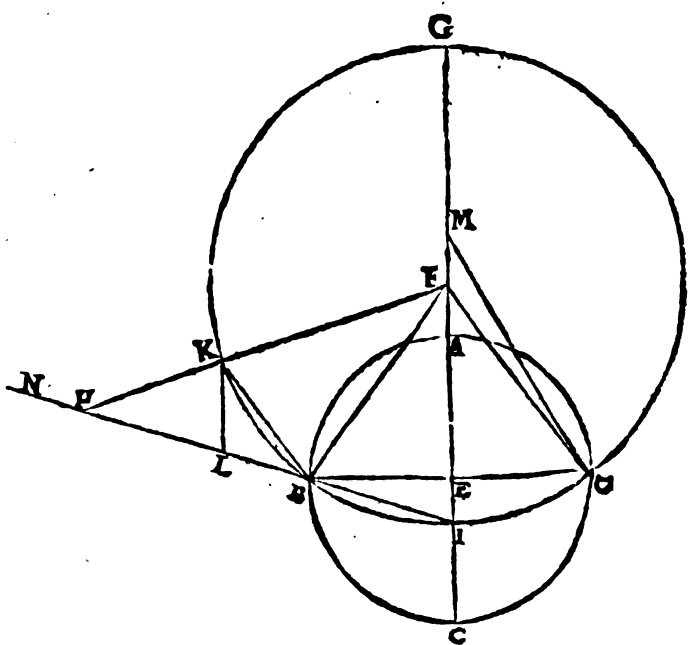
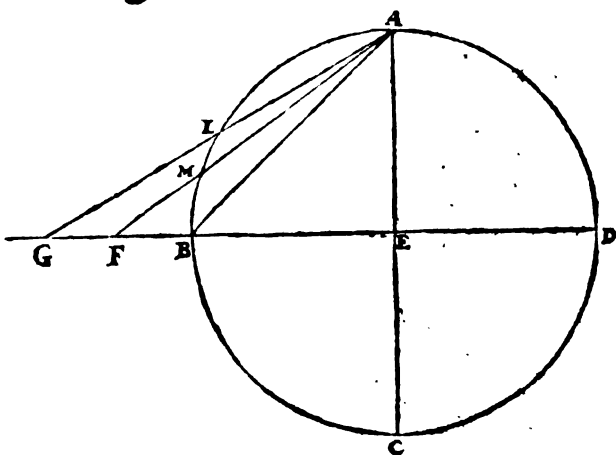
Εάν ἐν κύκλῳ δύο διαμέτρων ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς τεμνεσῶν, ὑπὸ  
 ἑκάστη μίᾳ ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐκβληθεῖσαν αἱ πλοδαὶ ἐξαγώνε  
 καὶ πενταγώνε τῶν τῶ κύκλῳ ἐγγραφομένων ἐκβληθεῖσιν, ἢ τὴν ἐκβλη-  
 θεῖσιν διαμέτρων ὑποτμή, ἢ μετὰξὺ τῶν τε ὀξυγώνε ἐκβληθεῖσιν καὶ ἑ-  
 τερογώνε τῶν κύκλῳ ἐγγραφομένων πλοδαῖ, δίχα ὑπὸ τῶν πενταγώνε  
 τέμνε).

PRO-

PROPOSITIO XII. Theorema.

Si duabus diametris in circulo sese normaliter secantibus, a limite vnus ad alteram productam latera Hexagoni & Pentagoni eidem circulo inscribendorum eiiciantur: residuum diametri eiectæ, quod interiectum est inter productum latus Hexagoni, & latus Quadrati circulo eidem inscribendi, bifariam a latere Pentagoni secatur.

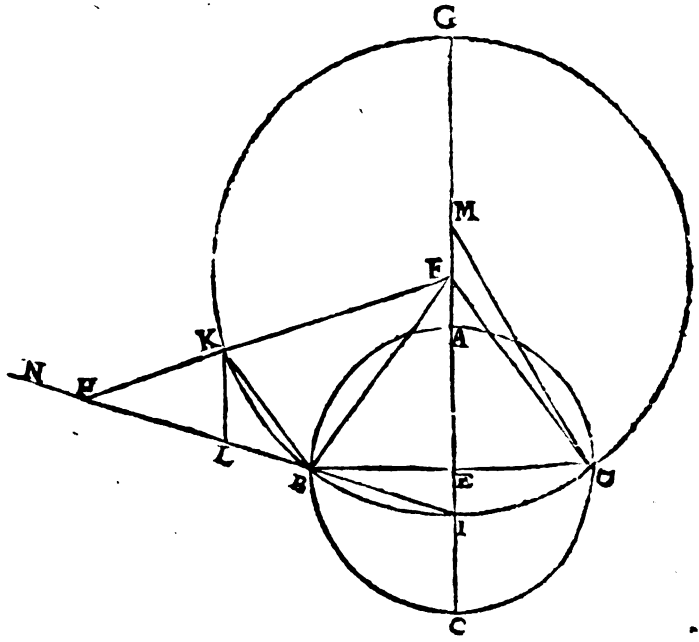
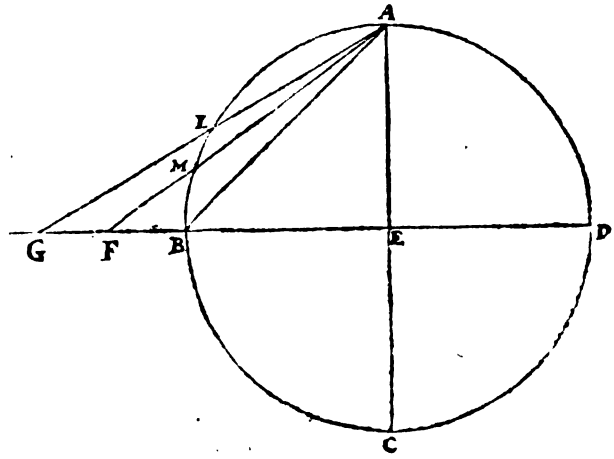
In circulo ABCD, diameter BD secans diametrum AC normaliter producta sit ad partes G in infinitum: cui producta occurrat recta AG equalis diametro AC. Connectatur recta AB, & CG. intelligatur esse iuncta. Deinde recta BG secta sit bifariam in F. Et manifestum est CG esse equalem ipsi GA: & totum triangulum AGC esse equilaterum, & quadrata AG, EG esse vt 4, & 3, vt iam toties diximus, ideoque inter se potentia commensurabilia tantum. EB autem dimidia ipsius AG est ipsi AG longitudine commensurabilis, ideoque ipsi EG



F 3    potentia



potentia tantum commensurabilis. Erit igitur BG ἀποτομή, linea ἀλογος. Aio, si in illam ἀποτομήν BG recta a limite A in punctum sectionis bifariae F demissa fuerit, in ipsa demissa esse latus Pentagoni circulo ABCD inscribendi: hoc est, latus Pentagoni circulo ABCD inscribendi productum occurrere signo F. Iungatur igitur recta AF secans peripheriam ALB in puncto M. Aio AM esse latus Pentagoni circulo ABCD inscribendi. Describatur alius circulus ABCD, cuius diametrus AC diametrum BD secans producat in partes M, aut G. Connectatur DM equalis diametro BD. Diuisa

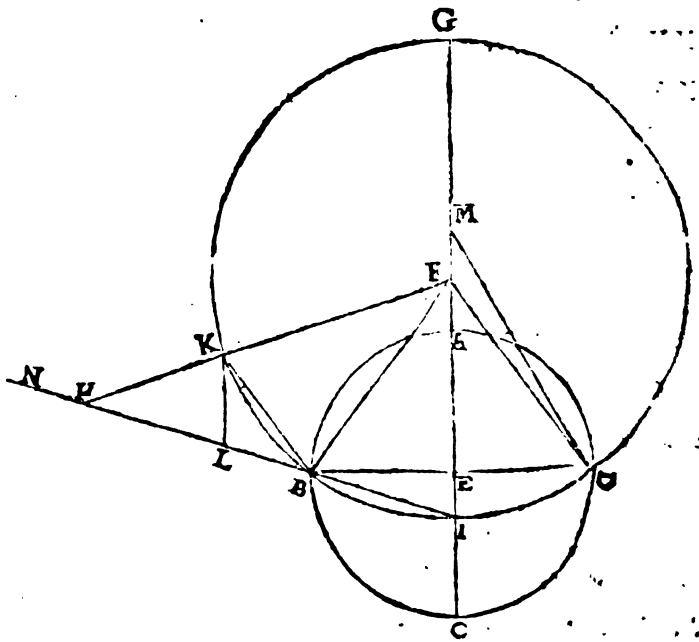
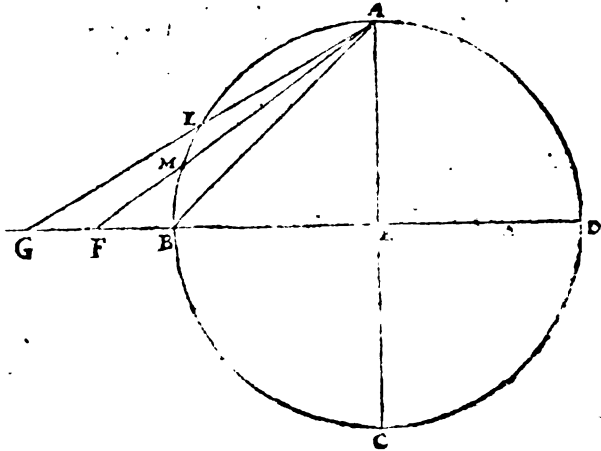


AM in F bifariam, iungantur FD, FB. Itaque, ut vides, hic MD obtinet locum rectae AG in altero circulo. Et AM est Apotome obtinens locum ipsius BG. Ostendendum est Triangulum BFD esse unum ex quinque Triangulis, in qua Pentagonum resolvitur. Eadem enim opera ostendetur in DF, hoc est in AF (in altero circulo) esse latus Pentagoni. Centro F, interuallo FD, aut FB, describatur circulus GBID. Connectantur rectae aequales BI, BK, et ex producta IB insuite in N, abscindatur BH ipsi FB aequalis. Connectatur recta

*recta HF, secans peripheriam GKBD in K. Deinde ex HI ab-*  
*scindatur HL ipsi HK equalis. Quia recta IB, BK aquales sumpta*  
*sunt: ergo peripherias aquales subtendent, per XXVIII tertij: & per*  
*XXVII eiusdem, anguli KFB, BFI Triangulorum FKB, FIB sunt*  
*aquales: & triangulum KHL alterutri triangulorum FKB, FIB*  
*aquangulum, cum angulus BHF sit equalis angulo BFH, per V pri-*  
*mi. Si enim duorum triangulorum isoscelium anguli ad verticem,*  
*sunt aquales, reliqui omnino erunt aquales, per XXXII primi, &*  
*triangula ipsa aquangula. Quare triangula KFB, BFI, KHL sunt*  
*aquangula. Anguli autem infra basim KLB, BIC sunt aquales, per*  
*V primi. Sed sunt alterni. Ergo recta KL, FI sunt parallela, per*  
*XXVII primi. Itaque per II sexti in triangulo HFI, erit ut HK, ad*  
*KF, ita HL ad LI. componendo, ut HF ad HK, ita HI ad HL. ἀνά-*  
*παλί, ut HK ad HF, ita HL ad HI. ὁμοιότης, ut HK ad HL, ita*  
*HF ad HI. Sed HK, HL ex constructione sunt aquales. Ergo HF,*  
*HI sunt aquales. & propterea Triangulum HFI isosceles. Cum*  
*igitur in triangulo HFI angulus ad verticem F sectus sit bisariam*  
*per rectam FB secantem basim HI in B, per III sexti, erit ut HF,*  
*boc est HI, ad FI, ita FI, boc est HB, ad BI. Ergo recta HI secta*  
*est in B media, & extrema ratione, per III definit. sexti. atque adeo*  
*eius segmentum maius BH est aquale semidiametro FI circuli GBID.*  
*Ergo minus segmentum BI est latus Decagoni eidem circulo GBID*  
*in scribendi, per conuersam IX tertij decimi Elementi, olim a Campa-*  
*no demonstratam. Et quia semidiametrus FI rectam BD bisariam*  
*secat in E, ex hypothesis, peripheriam quoque BID bisariam secabit,*  
*per IIII huius. & ideo periphēria IB, ID sunt decima partes perime-*  
*tri GBID. Recta autem BD erit latus Pentagoni eidem perimetro*  
*GBID in scribendi. Triangulum isosceles HFI habens alterutrum an-*  
*gulum ad basim FI duplū anguli H, qui ad verticem, est triangu-*  
*lum Pentagoni ad peripheriam, per X & XI quarti, si per V eiusdem,*  
*circa illud circulus describatur. Ergo Triangulum BFD est trian-*  
*gulum ad centrum unum ex illis quinque, in quod Pentagonum*  
*circulo GKBD in scribendum resoluitur, quandoquidem basis eius*  
BD est

*BD est latus Pentagoni circulo, cuius centrum F, inscribendi. Quod si in priore figura re-*

*cta CF iungatur, triangulum AFC est id triangulum, in quod Pentagonum circulo inscribendum, cuius circuli semidiametrus FA, resolvitur. Quare si recta EM iungeretur, esset triangulum isosceles MAE aquangulum triangulo AFC, cum angulum communem MAE habeant, & sint ambo isoscelia. Ergo reliquus AEM reliquo AFC erit aequalis. Est ergo triangulum isosceles AEM unum ex quinque, in qua Pentagonum resolvitur circulo ABCD inscribendum.*



*ac propterea AM est latus Pentagoni eidem circulo ABCD inscribendi. Quod erat demonstrandum.*

## Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

HINC clare constat, si duorum triangulorum isoscelium angulus ad verticem fuerit æqualis, Triangula fore æquangula. Nam in priore figura, si CF, & EM iungantur, ostensum est, quia amborum isoscelium FAC, EMA vnus angulus MAE est communis, & illi æquales sunt EMA, ACF, reliquum AEM reliquo AFC fore æqualem. E conuerso igitur anguli ad verticem AEM, AFC sunt æquales. Ergo reliqui sunt æquales. Sed & hoc clarius per v sexti, aut per xxxii primi.

Rursus quia si circuli diametrus fuerit linea certa, latus Pentagoni in eo inscripti est linea irrationalis, quæ vocatur Minor, per xi tertidecimi: & contra si latus Pentagoni

goni circulo inscripti fuerit linea certa, tota circuli diameter est linea irrationalis: est autem hic recta  $DB$  (in secunda figura) nempe latus Pentagoni, certa: ostendendum est, diametrum  $GI$ , vel, quod idem est, semidiametrum  $FD$ , esse irrationalem. Nam Apotomæ  $AM$  cum sit recta  $AF$  commensurabilis, dimidio scilicet totum: erit &  $AF$  Apotome, & ordine eadem, per  $CIIII$  decimi. Sed Apotomæ  $AM$  vna tantum recta congruit certa siue  $EA$ , quæ toti  $EM$  sit potentia commensurabilis, per  $LXXX$  decimi. Ergo  $EA$  cum Apotoma  $AF$  non efficiet totam  $EM$  potentia sibi commensurabilem. Quare tota  $EA$  est linea irrationalis. Semidiameter autem  $DF$  potens rectas  $EF$ ,  $ED$  per  $XLVII$  primi, est irrationalis. & tota diameter irrationalis. Nam potentia  $EF$ ,  $ED$  sunt inter se incommensurabiles. Ergo compositum ex ambabus, nempe  $DF$ , est alteruteri ipsarum incommensurabile, per  $XVII$  decimi. Quod enim ibi de longitudinibus tantum dicitur, id etiam ad potentias extenditur, &c. Cum igitur  $DF$  sit incommensurabile ipsi  $ED$   $\mu\pi\delta$ , ipsum erit  $\delta\lambda\sigma$ . Quod erat demonstrandum.

## ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΤΕΡΟΝ.

QVOD si in priore figura centris  $B, F, G$ , interuallis autem  $BA, FA, GA$ , circuli describantur: erit  $AC$  quidem latus polygonorum æquilaterorum eisdem circulis inscribendorum. Triangula autem  $ABC, AFC, AGC$ , erunt ea, in quæ polygona ipsa resoluuntur. verbi gratia: Triangulum  $BAC$  est vnum ex illis  $IIII$ , in quæ quadratum resoluitur inscribendum circulo, cuius circuli semidiameter  $BA$ . Rursus  $FAC$  erit triangulum vnum ex illis quinque, in quæ Pentagonum resoluitur inscribendum circulo, cuius circuli semidiameter est  $FA$ . Nam cum recta  $MA$  ex constructione sit latus Pentagoni circulo  $ABCD$  inscribendi, erit  $MAE$  semiangulus ipsius Pentagoni. Sed angulus Pentagoni est sex quintarum vnus recti. Ergo angulus  $MAE$  est trium quintarum: angulus autem ad  $E$  quinque quintarum. Ergo angulus  $AFE$  erit duarum quintarum, per  $XXXII$  primi, adiuuante etiam  $XVII$  eiusdem. Angulus autem totus  $AFC$  in triangulo Isoscele  $CAF$  (sic  $F$  iungatur) erit quatuor. Quare angulus ad peripheriam in Triangulo isoscele super basi  $AC$  constituto erit duarum quintarum, nempe dimidium anguli  $AFC$  ad centrum  $C$  constituti, per  $XX$  tertij. Erit igitur alteruter angulorum ad basim quaternum quintarum, ac propterea duplus anguli ad verticem: ideoque erit angulus Pentagoni, per  $X$  quarti. Quare Triangulum isosceles  $AFC$  est vnum ex quinque, in quæ Pentagonum resoluitur. Eodem modo centro  $G$ , interuallo  $GA$  descripto circulo, est triangulum  $AGC$  vnum ex illis sex, in quæ Hexagonum circulo, cuius circuli semidiameter  $G$ , inscribendum resoluitur.

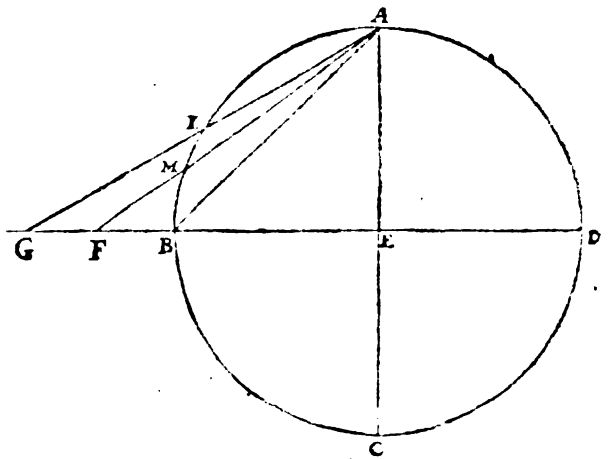
Porro omnium Polygonorum æquilaterorum in circulo eodem inscriptorum latera sunt inæqualia inuicem. Si enim latus Hexagoni lateri Pentagoni eodem in circulo inscriptorum esset æquale, Pentagonum haberet sex latera, aut Hexagonum quinque: quod est absurdum. Si igitur Triangula, in quæ resoluuntur Polygona æquilatera, super vna eademque recta linea constituta fuerint, non erit eorum idem circulus. Latera enim eorum Triangulorum sunt semidiametri circulorum, in quorum centris eorum vertices constituti sunt. Quo plura autem fuerint Polygona latera, eo maiora erunt necessario triangulorum latera: hoc est, maiores erunt semidiametri circulorum, in quorum centris constituti sunt vertices triangulorum isosceleon, in quæ polygona diuiduntur. Distabunt igitur centra circulorum inuicem aliquot interuallis, vt patet in interuallis  $GF, FB$ . In istis interuallis considerantur dif-

G  
ferentia

ferentia angulorum inuicem. Sunt enim  $GF, FB$  bases triangulorum  $GAF, FAB$ : Anguli autem  $GAF, FAB$  sunt differentia angulorum ad centrum  $ABE, AFB, AGE$ . qui quidem anguli sunt semisses triangulorum isosceleon  $ABC, AFC, AGC$ , siquidem recta  $CB, CF$  coniuncta animo concipiuntur. Rursum anguli  $ABE, AFB, AGF$  habent duas partes vnus anguli recti cognominis numeri laterum Polygonorum suorum. Verbi gratia: Trianguli  $ABE$  polygonum est quadratum, cuius quatuor sunt latera. Ergo angulus  $ABE$  habebit duas quartas vnus recti: angulus  $AFE$  duas quintas; angulus deniq.  $AGE$  duas sextas. Atque adeo qualium xxx partium cogitetur angulus rectus, talium xv erit  $ABE$ , xii  $AFE$ , x  $AGE$ . Quod si continuanda esset series angulorum in Polygonis, angulus Heptagoni haberet duas septimas; angulus octagoni duas octavas: angulus enneagoni duas nonas: & ita deinceps. Rursum in triangulis amblygoniis  $AFE, AGE$ , anguli externi  $ABE, AFE$  ad oppositos internos  $AFE, AGE$  habent rationem *amblygon*, siue superparticula rem cognominem polygonorum suorum. Angulus videlicet  $ABE$  angulum  $AFE$  superat vna quarta, quae est pars cognominis quadrati, quod quidem in quatuor triangula resoluitur aequalia ipsi  $ABC$ . Sic angulus  $AFE$  oppositi & interni anguli  $AGE$  sesquiquintus est. Quod si cogites angulum rectum partium 210, omnino semitriangulum quadrati erit 105, pentagoni 84, hexagoni 70, heptagoni 60: adeo vt angulus primus ad secundum sit sesquiquartus, secundus ad tertium sesquiquintus, tertius ad quartum sesquisextus. & ita deinceps in infinitum. Contraria est ratio angulorum  $BFA, FGA$  ad verticales  $BAF, FAG$ . Nam eorum ad illos ratio est multipla cognominis numeri laterum non polygonorum suorum, sed antecedentium: hoc est vno latere minus, quam Polygonorum suorum. Angulus itaque  $AFB$ , cum pertineat ad Pentagonum, erit non quintuplus, sed quadruplus anguli verticalis  $BAF$ . Sic angulus  $FGA$  erit anguli  $FAG$  non sextuplus, sed quintuplus. Nam per xvii primi angulus externus  $ABE$  est aequalis vtrique interno opposito  $AFB, FAB$ . Erit ergo  $FAB$  trium, qualium duodecim est  $AFB$ , aut quindecim  $ABE$ . Erit enim  $ABF$  xlv, per xiii primi.

Si anguli verticales binorum proximorum *xy diuisionem* Polygonorum parium laterum cogitentur ordine dispositi in infinitum, vt est angulus verticalis  $GAB$  inter duo Polygona proxima, Quadratum videlicet, & Hexagonum: deprehenderetur angulum  $GAB$  esse partium quinque: angulum autem inter Hexagonum & octagonum partium septem: angulum inter Octagonum, & Decagonum partium nouem: angulum denique inter decagonum

& dodecagonum partium vndecim: & ita deinceps in infinitum. & quia angulus verticalis Polygoni imparium laterum interiectus ipsos angulos secat, secabit eos in numeros pares & impares. Verbi gratia: Anguli  $FAB, GAF$  constituti a linea Pentagoni  $AF$  diuidentes angulum quinque partium  $GAB$ , non sunt aequales. Sed  $FAB$  trium partium,  $GAF$  autem duum. Sic angulorum ex linea Heptagoni constitutorum diuidentium angulum septem partium Hexagoni & Octagoni, propior Hexa-



gono

gono erit quatuor partium, remotior trium. Eorum autem, qui secabunt angulum Octagoni & Decagoni nouem partium, propior octagono erit quinque partium, remotior quatuor, & ita deinceps. adeo vt diuisio ita facta sit, vt accedente vnitate ad minorem, ipsa diuisio sit bifaria, &c.

Super lateribus polygonorum æquilaterorum constituti anguli ad peripheriam dimidium sunt angulorum ad centrum, per  $x$  tertij: acquirunt autem alterum dimidium angulis ad basim. Verbi gratia: Angulus ad peripheriam circuli, cuius semidiametrus  $AF$ , super basi  $AC$ , est dimidius anguli ad centrum, hoc est, æqualis angulo  $APB$ : acquirit autem angulo ad basim dimidium eiusdem  $APB$ , & alteri ad basim alterum dimidium. Ita fit, vt alteruter angulorum ad basim sit reliqui multiplus, aut multiplus sesquialter: multiplus quidem, si polygonum circulo inscribendum fuerit laterum æqualium imparis numeri: multiplus autem sesquialter, si fuerit æqualium laterum imparis numeri. Quota autem pars fuerit angulus ad peripheriam angulorum amborum ad basim simul sumptorum, eadem pars erit vnum laterum reliquorum laterum simul sumptorum. Super latere, verbi gratia, Pentagoni, constituitur triangulum isosceles, cuius angulus ad peripheriam est quarta pars amborum angulorum ad basim simul sumptorum, cum alteruter ex ipsis sit duplus reliqui. Ergo & latus vnum Pentagoni reliquorum quatuor simul sumptorum erit quarta pars. vt in ipsis triangulorum tribus simul angulis considerandæ sint tot multiplicitates, quot in eorum Polygonis sunt latera.

Rursus angulus quadrati habet quinque quartas Pentagoni, sex quartas hexagoni, septem quartas heptagoni, octo octagoni, &c.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ. Θεώρημα.

Εὰν Ἐπὶ τῆς αὐτῆς δ' ἑξείας τὰ τρίγωνα ἰσοκελῆ, εἰς ἃ διαρξῆται τὰ πολύγωνα ἰσόπλευρα, τὰ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενα, συσταθῶσιν, αἱ καὶ τὰς κορυφαῖς γωνία τῶν περὶ τοὺς πλάτους πολυγώνων τὸ ἀμέσως μετὰ τῶν συσταθέντων ἀξιοπλάτους πολυγώνων διάστημα δίχα τέμνῃσι.

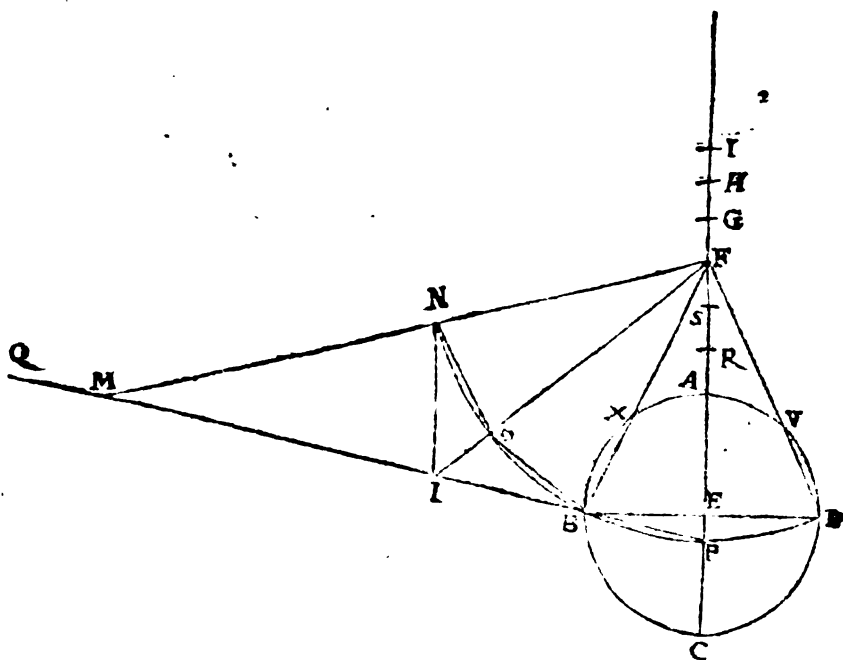
## PROPOSITIO XIII. Theorema.

Si super eadem recta Triangula æquicruria, in quæ diuiduntur Polygona æquilatera circulo inscribenda, constituta fuerint, anguli Polygonorum ad verticem latera paris numeri habentium bifariam secant interuallum interiectum inter duo proxima polygona latera paris numeri habentia.

G 2

Si super

Si super eadem recta Triangula isoscelea, in qua polygona circulo inscribenda resoluuntur, constituta fuerint, ea distabunt a se aliquot intervallis, per secundam partem superioris Scholij. Aio



intervalla, qua fiunt in diametro producta, ut in antecedenti figura patuit, intervalla, inquam, interiecta inter duo proxima polygona paris numeri laterum, secari bifariam a lateribus polygonorum imparis numeri circulo inscribendorum productis, & occurrentibus diametro producta: quemadmodum in superiore Theoremate demonstratum est, latus Pentagoni circulo inscribendi productum & occurrens diametro eiecta, secare bifariam intervallum inter quadratum & Hexagonum, qua sunt duo aduersa & proxima Polygoni paris numeri laterum. In circulo ABCD, diametrum BD secet normaliter diametrum AC producta infinite: qua secetur in s, quasi recta SD aequalis recta AC iuncta esset a limite D, & faceret semitriangulum isopleuron DSE, ut supra ostensum est. Rursus abscindatur intervallum AG aequale lateri quadrati circulo ABCD inscribendi. Si igitur recta DG iungeretur, esset angulus EGD semiangulus trianguli unius ex octo, in qua octagonum circulo, cuius semidiametrum GD, inscribendum, resolvitur,

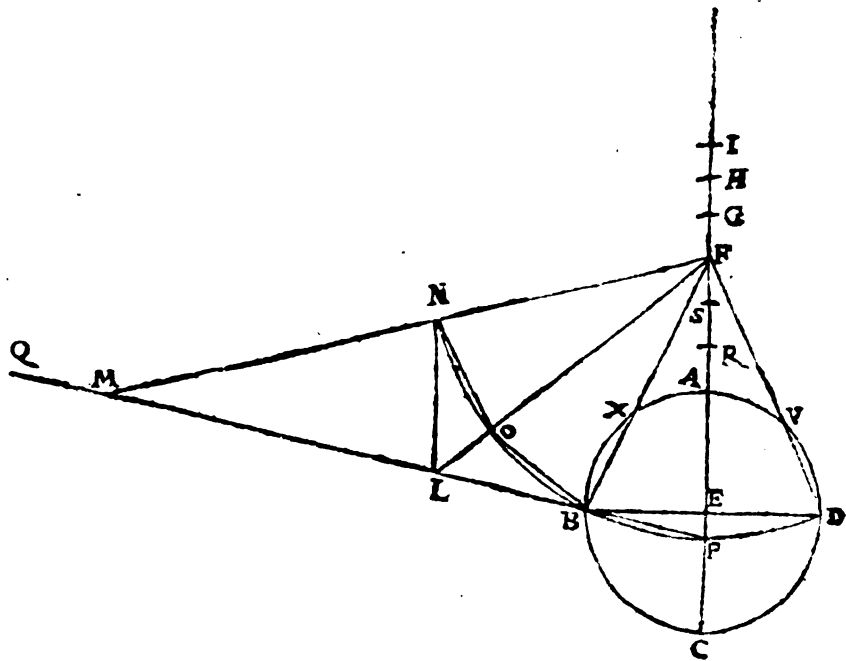
resolvitur, per XX tertij. Postremo intervallum AS bifariam  
 secetur in R. Si DR iuncta esset, esset semiangulus trigoni unius ex  
 quinque, in qua Pentagonum resolvitur, ut supra ostensum est.  
 Quare fiat intervallum RI aequale recta connectenda DR. Rursus  
 si recta DI necteretur, esset IDE semitriangulum unum ex decem,  
 in qua decagonum resolvitur, per eandem XX tertij. Secentur in-  
 terualla AS, SG, GI bifariam in signis F, H. Connectatur recta DF,  
 secans circulum ABCD in V. Ostendendum est DV esse latus He-  
 ptagoni circulo ABCD inscribendi. Centro F, intervallum FB, vel FD,  
 describatur peripheria PBN. Iungatur recta PB: cui aequales con-  
 nectantur BO, ON. Itaque peripheria, quae ab illis subtenduntur,  
 sunt aequales, per XXIX tertij. Producaturs PB ad partes Q in in-  
 finitum: cui occurrat recta a limite F, connectens N terminum peri-  
 pheria ON, & pergens, donec occurrat infinita PQ in signo M. Iun-  
 gantur recta FD, FB, FL, & ex recta PM abscindatur recta ML  
 aequalis ipsi MN. Connectatur NL. Quia anguli NOF, BOF sunt  
 aequales ex constructione, producto latere communi FL, erunt an-  
 guli subter basim NOL, BOL aequales, per V primi. & per IIII eius-  
 dem, erunt bases LN, LB aequales in triangulis NLO, BLO: & an-  
 gulus ONL angulo OBL aequalis. Sed anguli FNO, FBO sunt aqua-  
 les, ex constructione. Ergo totus angulus LNF toti angulo LBF  
 aequalis. Rursus FNL, MNL simul in recta MF sunt aequales angu-  
 lis FBM, FBP, simul in recta PM, per XIII primi. Ablatis aqua-  
 libus FNL, FBM, remanent aequales FBP, MNL. Ideo anguli  
 MNL, MLN angulis FBP, hoc est, FNO, FON aequales. Et quia  
 sunt triangula isoscelea, erit reliquus angulus NML reliquo NFO  
 vel NFL aequalis: & propterea recta FL recta LM aequalis in trian-  
 gulo MLF. per primi. In triangulo igitur MLN, anguli NML, MLN  
 aequales sunt angulis MPF, FMP in triangulo MFP. Et reliquus igi-  
 tur MNL reliquo MFP aequalis: & triangulum NML triangulo  
 FMP equangulum, & simile, per I. definit. VI. Ideo per IIII eiusdem,  
 erit ut MN ad ML, ita MF ad MP. Sed MN, NL ex constructio-  
 ne sunt aequales. Ergo & MF, MP sunt aequales: & triangulum MFP

G 3

isosceles,

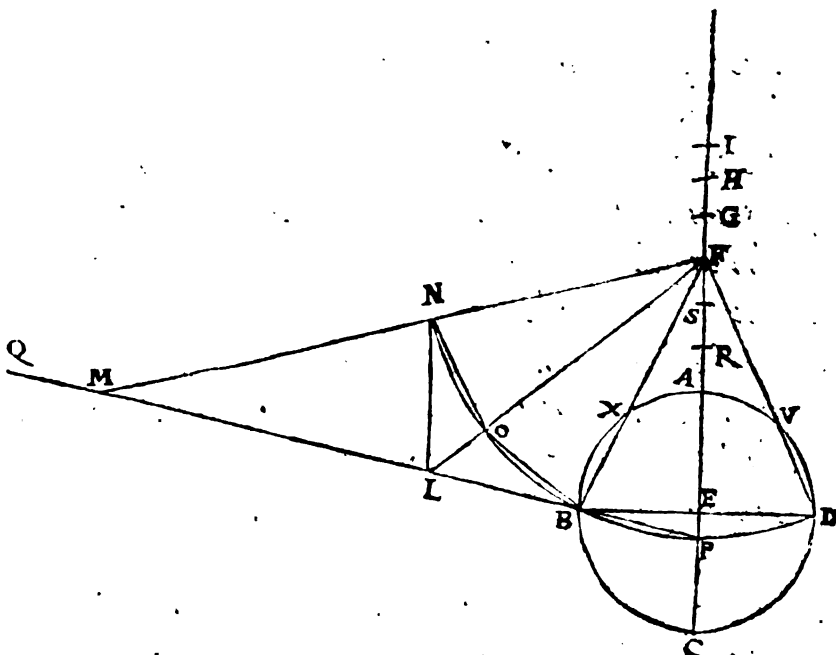


isofceles, cuius angulus  $MFP$  super basi  $FP$  est triplus anguli  $M$ . Ergo triangulum  $MFP$  est triangulum Heptagoni ad peripheriam, per proximum Scholion. Et quia triangulum  $BFP$  est



aquangulum, ut iam demonstratum est, trianguli  $MFP$ , erit et ipsum triangulum heptagoni ad peripheriam, et proinde triangulum ad centrum unum ex quatuordecim, in qua Tessarescadedecagonum resolvitur, per  $xx$  tertij. Et ideo segmentum  $BP$  est segmentum Tessarescadedecagoni, et recta subtendens est eius latus. Et quia peripheria  $PD$  peripheria  $BP$  est equalis, (quod tota  $BPD$  dividatur bisariam a recta  $FP$  diidente subtendentem  $BD$  bisariam, per  $iiii$  huius,) ergo recta  $BD$  est latus Heptagoni circulo inscribendi, cuius circuli semidiameter est  $FD$ . ac propterea triangulum  $BFD$  est triangulum ad centrum ex illis septem, in qua Heptagonum resolvitur. Quod si recta  $EV$  iungeretur, esset triangulum isofceles  $EVD$  aquangulum triangulo isofceli  $BFD$ , cum angulum ad  $D$  communem habeant. Erit igitur triangulum  $EVD$  unum ex illis septem, in qua Heptagonum circulo  $ABCD$  inscribendum resolvitur. Et propterea  $DV$  est latus Heptagoni circulo  $ABCD$  inscribendi, quod pro-

productum secat bisariam interuallum  $SG$  in puncto  $F$ . Quod si coniungantur  $HB, HD$ , & centro  $H$ , interuallo  $HB$ , aut  $HD$ , de-



scribatur peripheria portio ita, ut ex ea, qua eiecta erit post  $B$ , abscindantur tres peripheriae aequales illi, quam recta  $HE$  producta finiuerit, & reliqua, ut hic, absoluantur: habebis triangulum enneagoni ad peripheriam. Demonstratio eadem est. Ita omnia alia triangula isoscelea proportionalia habebis in infinitum. Sed semper obseruandum, ut ultima linea, qualis est  $LF$ , sit aequalis ipsi  $LM$ , &  $FM$  aequalis ipsi  $PM$  secet precise limitem ultima peripheria. Alioquin erratum est. Quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ. Πεδελημα.

Επί τῷ δοθείσης διθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσοκελές συστήσασθαι ἕκαστον τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνίων ἔχει πρὸς τὴν λοιπὴν τὸν δοθέντα λόγον.

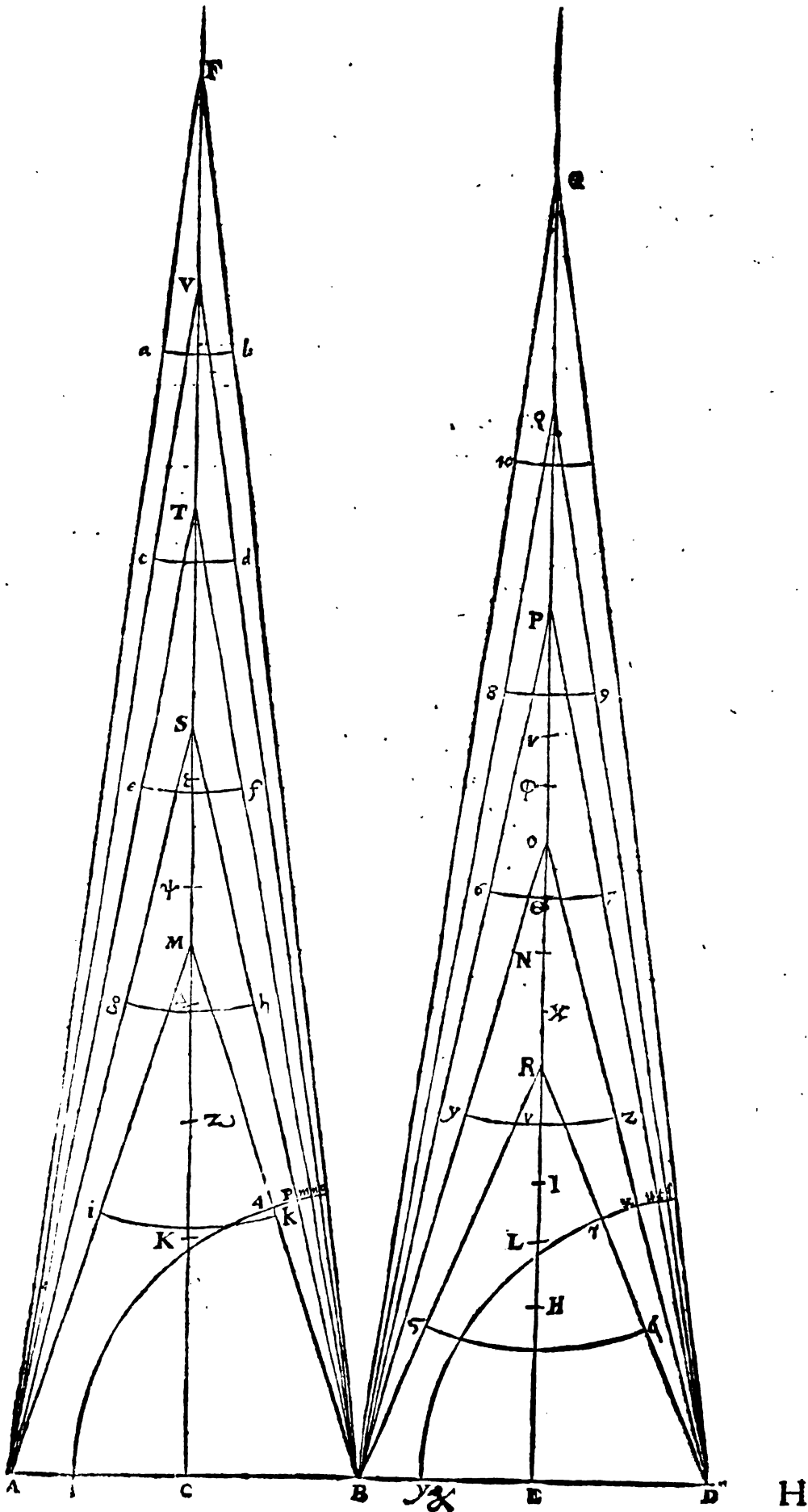
PROPOSITIO XIII. Problema.

Super data recta linea terminata Triangulum isosce-

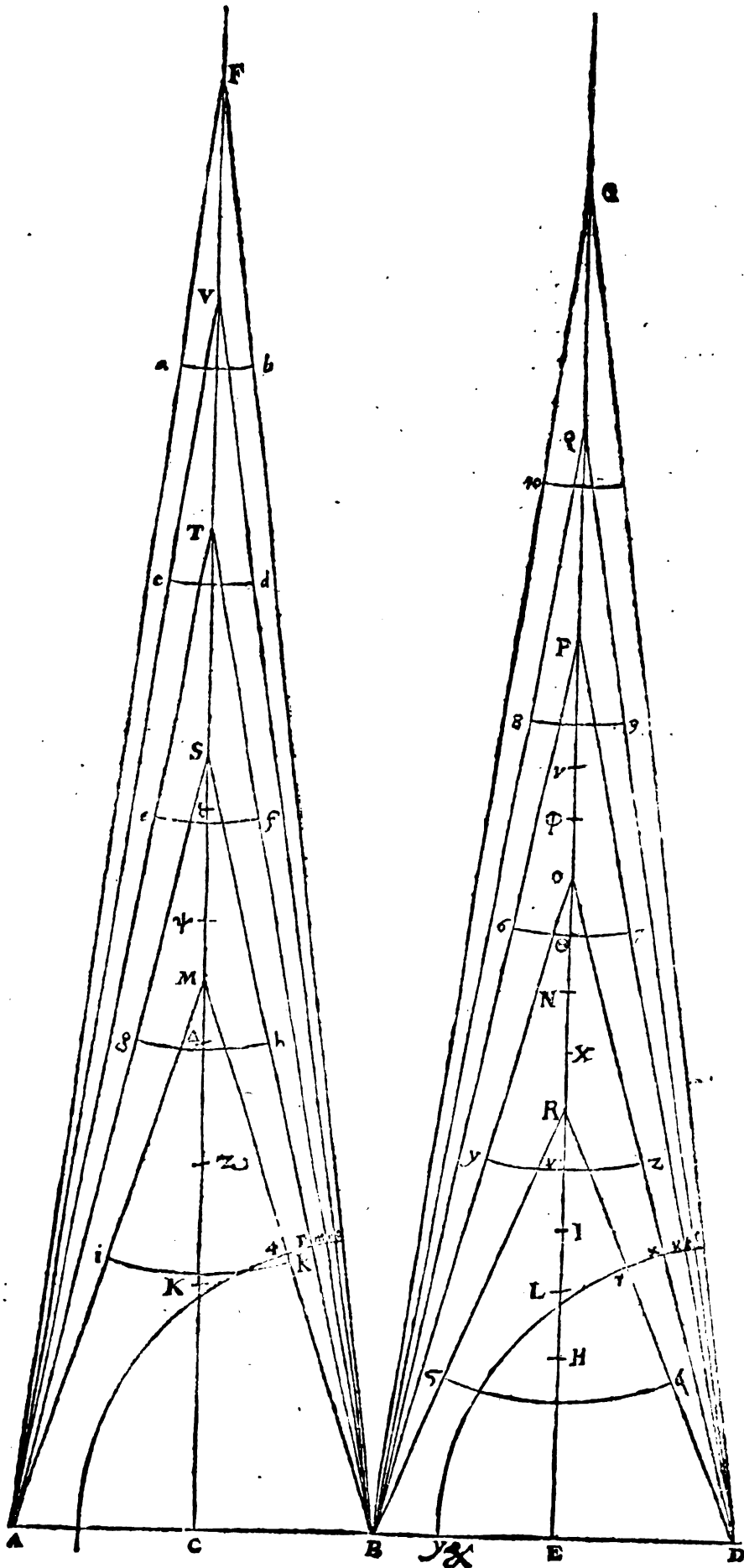
ifosceles constituere, cuius alteruter angulorum ad basim habeat ad reliquum rationem datam.

*In superiori propositione docemur quidem omne Triangulum ifosceles construere, cuius alteruter equalium angulorum habeat ad reliquum rationem datam. Sed non data est basis. Imo super inaequalibus basibus constituta sunt. Exempli gratia, in antecedenti figura basis PR Trianguli Pentagoni est minor basi PF Trianguli Heptagoni: & ipsa PF minor basi trianguli Enneagoni PA. Hic contra super data recta linea terminata iubemur omne tale Triangulum ifosceles constituere. Data AB, & ei aequali BD, diuisis bifariam in C, E, constituentur a punctis sectionum perpendiculares infinita CF, EG. Abscindatur recta aequalis dimidia ED. Interuallo autem connectenda DH abscondatur aequale HR. Connexis rectis RB, RD, erit triangulum ifosceles BRD, triangulum quadrati ad peripheriam. & idem erit triangulum octagoni ad centrum; per XX tertij. Deinde connectenda DI fiat aequalis ipsi DB. Quod si recta DI, BI connecterentur, esset triangulum BID trianguli hexagoni ad centrum. Interuallo igitur connectenda DI fiat aequale IO. Connexis rectis BO, DO, erit triangulum BOD triangulum Hexagoni ad peripheriam, per eandem XX tertij. Interuallo connexa DR fiat aequale RP. Iunctis rectis BP, DP, erit triangulum ifosceles BPD, Triangulum octagoni ad peripheriam. Secto bifariam in L, interuallo HI interiecto inter angulos ad centrum H, I Quadrati & Hexagoni, abscondatur CK aequalis ipsi EL in perpendiculari CF: & interuallo connectenda BK abscondatur KM aequale. Connexis AM, BM, erit Triangulum AMB Triangulum Pentagoni ad peripheriam, & idem triangulum decagoni ad centrum. Quare interuallo connexa BM abscondatur aequale EN, in perpendiculari EG. In qua interuallo connectenda DN fiat NQ aequale. Connexis BQ, DQ, erit Triangulum BQD, triangulum Decagoni ad peripheriam. Interuallo IR inter Triangula ad centrum Hexagoni & Octagoni secto bifariam in Y, abscondatur spatium EY aequale CZ in perpendiculari CF. interuallo autem recta*

conne-



connectenda  $BZ$  fiat aequale  $ZS$ . Iunctis rectis  $AS, BS$ , erit Triangulum,  $ASB$  Triangulum Heptagoni ad peripheriam: ideoque idem erit Triangulum ad centrum Tessarescadecagoni. Ex perpendiculari  $EG$  abscindatur  $EV$  aequalis ipsi  $CS$ : intervallo autem recta connectenda  $DV$  fiat aequale  $VG$ . Connexis rectis  $BG, DG$ , erit Triangulum  $BGD$  Triangulum Tessarescadecagoni ad peripheriam. Rursum intervallo  $RN$  interiecto inter Triangula Octagoni, & Decagoni ad centrum, secto bisariam in  $x$ , fiat  $C\Delta$  aequale ipsi  $EX$ . Intervallo vero connectenda  $B\Delta$  fiat aequale spatium  $\Delta T$ . Connexis rectis  $TA, TB$ , erit, per antecedentem, Triangulum  $BTA$ , Triangulum Enneagoni ad peripheriam. Intervallo  $NO$  inter Triangula ad centrum Decagoni & Dodecagoni in perpendiculari  $EG$ , diuiso bisariam in  $\Theta$ , fiat  $C\Upsilon$  in perpendiculari  $CF$ , aequalis ipsi  $E\Theta$ . Intervallo recta connectenda  $B\Upsilon$  fiat aequale  $\Upsilon V$ . Iunctis rectis  $VA, VB$ , erit Triangulum  $AVB$  Triangulum Hendecagoni ad peripheriam. Eodem modo Triangulum  $AFB$  erit Triscadecagoni ad peripheriam, sumpto intervallo equali inter Triangula ad centrum Dodecagoni, & Tessarescadecagoni. Nam Triangulum  $ASB$  est Triangulum Tessarescadecagoni ad centrum. Ex peripheria  $EG$  abscindatur recta  $EV$  aequalis rectae  $CS$ . & intervallo  $OV$  inter Triangula ad centrum Dodecagoni & Tessarescadecagoni secto bisariam in  $\Phi$ , in perpendiculari  $CF$ , fiat  $C\varepsilon$  aequalis ipsi  $E\Phi$ . Intervallo vero connectenda  $B\varepsilon$  fiat aequale  $\varepsilon F$ . Et ita semper in infinitum progredi possumus. Itaque habemus super data recta  $AB$ , triangula isoscelea polygonorum  $\pi\epsilon\iota\sigma\omicron\pi\lambda\delta\acute{\epsilon}\omega\nu$  ad peripheriam,  $AMB, ASB, AVB, AFB$ , Pentagoni, Heptagoni, Enneagoni, Hendecagoni, Triscadecagoni. Super recta autem  $BD$  equali data  $AB$ , habemus totidem Triangula isoscelea ad peripheriam polygonorum  $\delta\epsilon\pi\omicron\pi\lambda\delta\acute{\epsilon}\omega\nu$   $BRD, BOD, BPD, BQD, BGD$ . Quare angulus  $MAB$  erit duplus anguli  $M$ : angulus  $SAB$  anguli  $S$  triplus: angulus  $TAB$  quadruplus anguli  $T$ : angulus  $VAB$  quintuplus anguli  $V$ : angulus denique  $FAB$  anguli  $F$  sextuplus. Decircinatis eodem intervallo peripheriis  $ol, ik, gh, ef, cd, ab$ , erit peripheria  $ql$  dupla peripheria  $ik$ : peripheria  $pl$  tripla ipsius  $ef$ : &

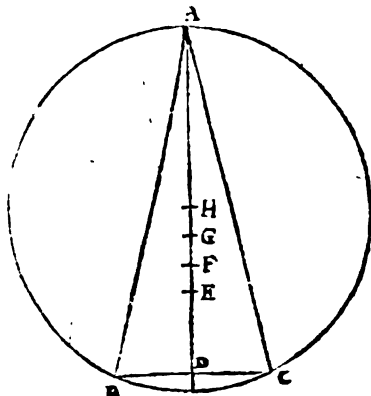


H<sub>2</sub>

e f: & sic deinceps per xxxiii sexti. Sic peripheria  $x$  & peripheria  $y z$  sesquialtera: peripheria  $x$  & peripheria  $y z$  dupla sesquialtera. Quod erat faciendum.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ex his perspicuum est, quomodo dato vno ex his triangulis isoscelibus circulus circa illud describendus sit. Esto datum triangulum isosceles  $ABC$  habens angulum ad basim triplum illius, qui ad verticem, nempe  $A$ . Iubemur circulum circa illud describere. Acta perpendiculari  $AD$ , ex ea auferatur  $DE$ , æqualis ipsi  $DC$ . Per ea, quæ in superioribus propositionibus demonstrata sunt, Triangulum  $CEB$  esset id, in quod resoluitur quadratum. Deinde sit spatium  $CG$  æquale ipsi  $BC$ . Diuisa  $EG$  bifariam in  $F$ , est nota Pentagoni. Esto  $H$  nota Heptagoni. Centro  $H$  interuallo  $HA$  descriptus circulus transibit per  $B, C$ . Neque demonstratione opus est: cum per antecedentia satis ostensum sit iunctis  $HC, HB$ , triangulum  $HBC$  esse triangulum ad centrum resoluendo Heptagono. Ergo tam connectenda  $HC$ , quam  $HB$  sunt semidiametri, &c.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ. Περίληψη.

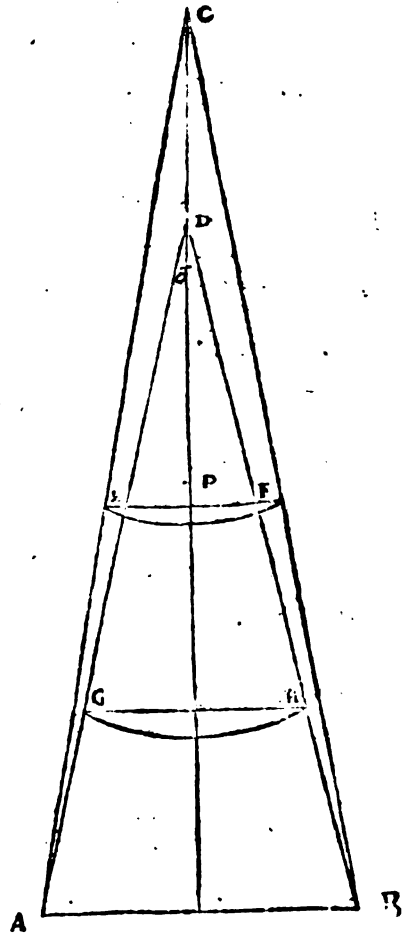
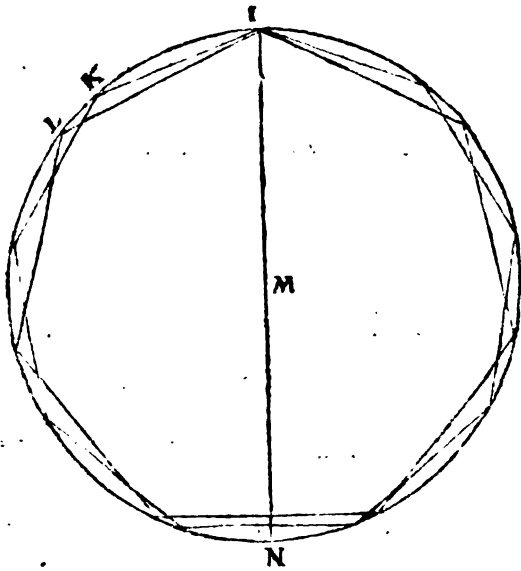
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον γῆμα περίσῳγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραψαί.

## PROPOSITIO XV. Problema.

Circulo dato figuram imparis numeris angulorum æquilateram inscribere.

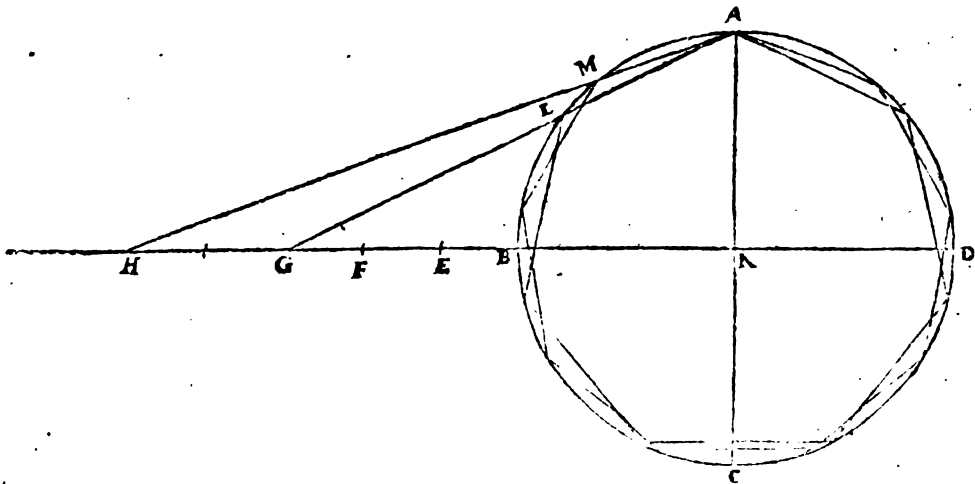
In dato circulo  $IKLN$ , cuius diameter  $IN$ , centrum  $M$ , sit describendum Heptagonum, aut Enneagonum, aut aliud polygonum laterum imparis numeri. Super recta  $AB$ , quæ non sit minor semidiametro  $NM$ , describantur triangulum quidem Heptagoni  $ADB$ , Enneagoni autem  $ACB$ , per antecedentem. Deinde per  $II$  quarti, in circulo  $IKLN$  describantur triangula equangula triangulis  $ADB, ACB$ . Quare bases eorum erunt latera Polygonorum circulo inscribendorum, ut proxima propositione demonstratum fuit, aut quemadmodum Euclides in  $XI$  quarti, in descriptione Pentagoni fecit.

ALITER.



ALITER.

*In circulo ABCD diametris BD diametrum AC secans normaliter producat in partes H. Sunt anguli HAK, AGK semian-*



*guli triangulorum ad centrum Enneagoni, Heptagoni. Per ea, qua ante demonstrata sunt, recte AL, AM circulo ABCD accommodata*  
*H 3 data*



*data erunt latera Heptagoni & Hexagoni eidem circulo inscripturum, &c. Quod erat faciendum.*

Λ Η Μ Μ Α.

Πάντων τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλῶρων τὸ ὑπὸ τῶν διαγωνίων ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ εἰς ἀμφοτέρων τῶν ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων πλευρῶν συγκληθέντι.

L E M M A.

**Omnium, quæ in circulis sunt, quadrilaterorum sub diagoniis conceptum rectangulum est æquale composito ex utroque, quod oppositis lateribus continetur.**

*Demonstrationem pete ex Ptolemai libro primo magni operis.*

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Ις. Πρόβλημα.

Τεσσάρων διδεῶν ἀρίσων δοθεισῶν περισβεῖν κύκλον, ὥστε εἰς αὐτὸν τὸ ἐκ τῶν τεσσάρων δοθεισῶν συγκληθέν τετραπλῶρον εἰθεῖναι.

PROPOSITIO XVI. Problema.

**Datis quatuor rectis inæqualibus, circulum inuenire, ita vt in eo inscribi possit quadrilaterum ex quatuor datis constitutum.**

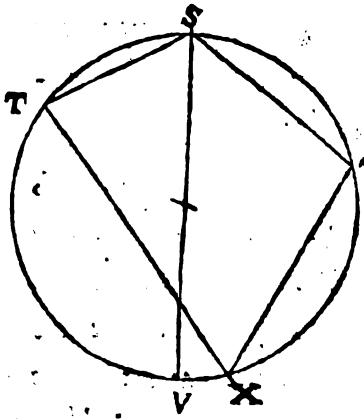
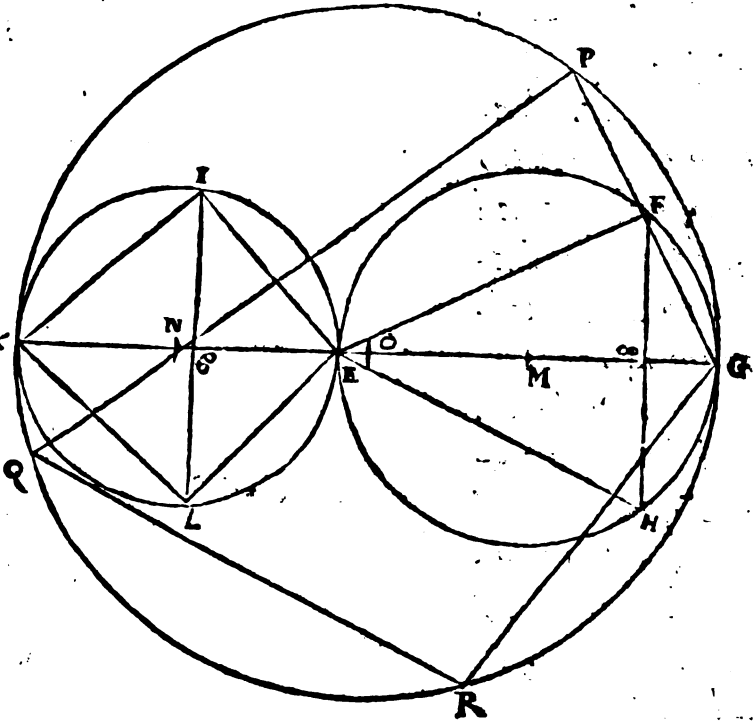
*Vel, quod idem est, ἐκ τεσσάρων διδεῶν ἀρίσων δοθεισῶν τετραπλῶρον συστήσασθαι, ὥστε περὶ αὐτὸ κύκλον περιγράψαι. Ex quatuor rectis inæqualibus datis quadrilaterum ita construere, ut circa ipsum circulus circumscribi possit. Sunt igitur data inæquales rectæ quatuor A, B, C, D. Rectæ FG, FE æquales rectis A, B, item rectæ IE, IK æquales reliquis C, D faciant angulos rectos F, I super basibus collocata EG, EK componentibus unam perpetuam rectam KEG, & diuisis bifariam in punctis M, N. Centris M, N, interuallis MG, MK descripti circuli transibunt per puncta F, I, per XXXI tertij, adiuvante*

nante etiam v quarti. Iunctis HG, HE, qua ipsi FG, FE, item re-  
ctis LE, LK, qua rectis IE, IK sint aequales, connectantur FH, IL se-  
cantes EG, EK in

punctis a, b. Erit  
rectangulum sub  
rectis EG, FH  
aquale composito  
ex rectangulo sub  
oppositis FE, GH,  
& eo, quod sub  
oppositis FG, EH:  
item quod sub IL,  
KE erit aequale  
composito ex re-  
ctangulo sub oppo-  
sitis KI, LE, &  
eo, quod sub oppo-  
sitis IE, KL, ut demonstrat Pto-  
lemaeus in Lemmate antecedente.

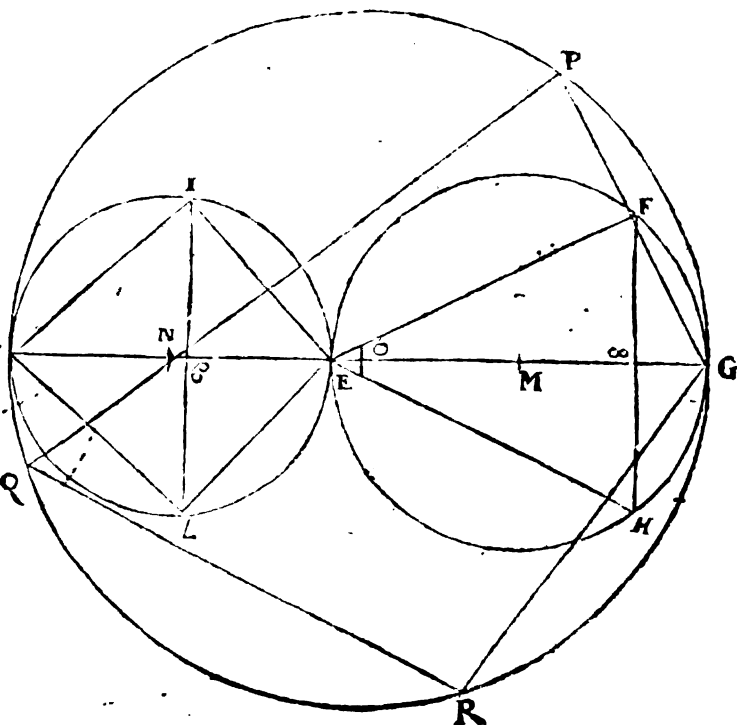
Ergo rectangulum sub composita  
ex GE, EK. & composita ex HF,  
LI est aequale rectangulo sub  
geminatis FE, FG. & gemina-  
tis IK, IE, in circulo, cuius dia-  
metrus composita erit ex utra-  
que EK, EG: id est cuius diame-

trus erit recta GK: qua diuisa bisariam in O, centro O, interuallo  
OG, OK descriptus circulus PKQRG continebit quadrilaterum  
PQRG compositum ex PQ, QR, RG, GP duplis rectarum FE, IK, IE,  
EG. Quare si iungerentur recta PR, QG: rectangulum sub diametris  
Quadrilateri, nempe sub PR, QG, esset aequale composito rectangulo-  
rum sub oppositis PQ, RG: id est composito ex rectangulo sub duplis  
FE, IE, & eo, quod sub duplis IK, FG. Ergo per xv quinti, circulus  
descriptus

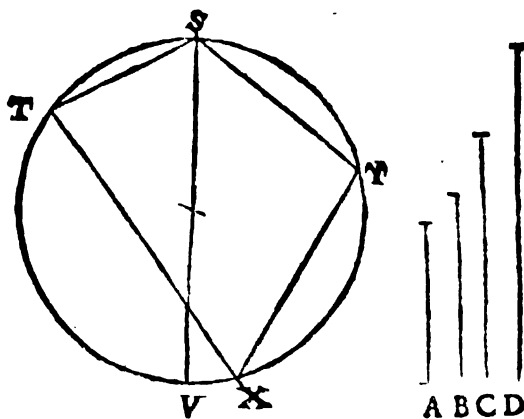


descriptus circa OG, vel OK, dimidia nempe ipsius GK, continebit quadrilaterum simile, similiterque situm quadrilatero PQRG habente rationem

ad ipsum PQRG, quam quadratum ex diametro OG, vel OK, ad quadratum a diametro GK, per primam XII. hoc est, quam recta ad suam duplam, nempe quam FE ad PQ, aut IK ad QR, aut IE ad RG, aut deniq. FG ad PG. Circa dia-



metrū igitur SV, qua sumpta sit aequalis ipsi OG, vel ipsi OK, descriptus circulus STVXY continebit quadrilaterum STXY simile, similiterq. positum quadrilatero PQRG, ita ut rationem ad illud habeat, quam quadratum ex SV ad quadratum ex GK, hoc est, quam FE, IK, IE, FG ad ho-



mologas PQ, QR, RG, GP. Erunt igitur recta TX, XY, YS, ST aequales ipsis FE, IK, IE, FG. Sed ipsa FE, IK, IE, FG sumpta sunt aequales ipsis D, C, B, A. Ergo recta TX, XY, YS, ST quadrilateri STXY circulo STVXY inscripti sunt aequales rectis propositis D, C, B, A. Quod erat faciendum.

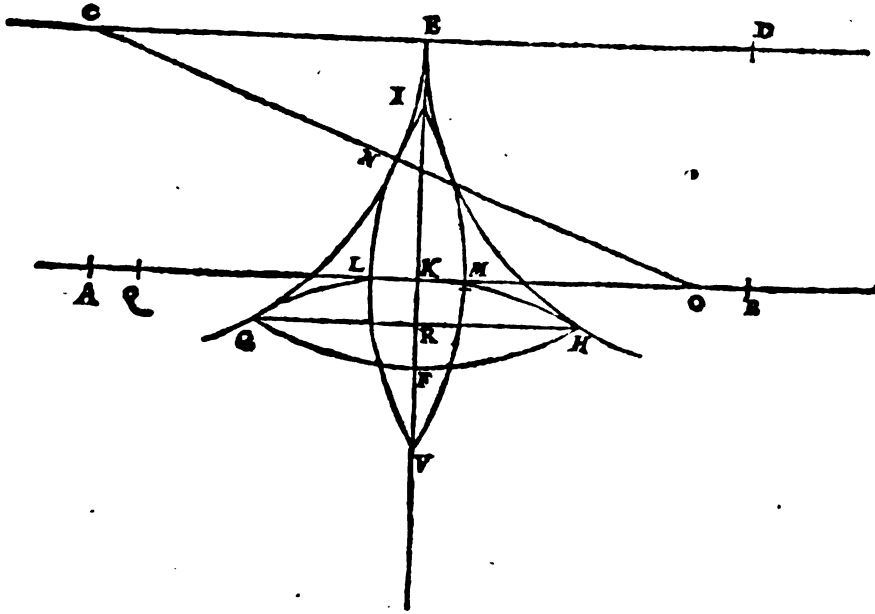
ΠΡΟΞ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ. Πρβλνμα.

Εἰς τὸ πελέκειν ἕξαγώνῳ ὡς ἀπλήρωμα τμήμα ἐξαγώνῳ ἐπιγράψαι.

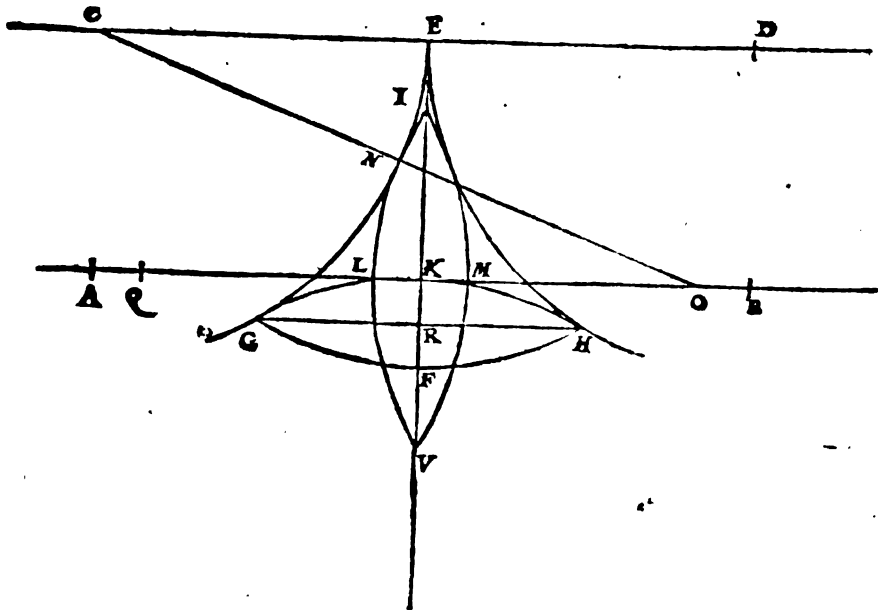
PROPOSITIO XVII. Problema.

Complemento securicla Hexagoni segmentum Hexagoni inscribere.



Videndum, an complemento securicla Hexagoni inscribi possit segmentum Hexagoni, aut, quod idem, duo semisegmenta Hexagoni. Recta CED magnitudinis non finita sit perpendicularis recta EV infinita. Abscindantur intervalla quacunque equalia EC, ED. Deinde centris C, D, intervallis vero CE, DE, describantur peripheria EG, EH. Rursus eodem intervalla, centro autem E, describatur peripheria GFH: quam recta EF, ex infinita EV abscissa, nempe semidiametrus peripheriarum, dividet bifariam in F. Peripheria igitur ENG, EH, GFH, sunt equalis, per primam defin. tertij elementi: quia recta connexa GH est semidiametris EF, CE, DE, equalis. Quare per definitionem primam huius, figura ENGFHE est securicla Hexagoni, & recta RF Apotome, ut alibi demonstratum est: cui equalis RK abscindatur: & fiat segmentum GRHMKLG  
I  
aqualet

aquale segmento  $GRFHG$ . Ideo utrumque erit segmentum Hexagoni, ac proinde figura  $ENKHE$  est Complementum Sectoris, per definitionem secundam huius. Jam Apotome  $RF$  minimo maiuscula



est una octava semidiametri  $EF$ , ut in  $\vee$  huius demonstratum est. Propterea tota  $FK$  duabus octavis semidiametri paulo maiuscula est. Itaque reliqua  $KE$  paulo minus est intra sex octavas semidiametri. Idcirco erit maior, quam  $RG$ , paulo minus, quam dua octava semidiametri  $EF$ , ut in eadem  $\vee$  huius ostenditur. In recta igitur  $EK$  potest inueniri altitudo semisegmenti, cum peripheria  $ENG, EH$  tangant sese tantum in puncto  $E$ , per XIII tertij. A puncto  $K$  agatur recta infinita parallela ipsi  $CD$ , per XXXI primi: ex qua abscindatur  $KB$  equalis semidiametro  $DE$ , vel ipsi  $EC$ : atque ex eadem rursus abscindatur apotome  $BO$ , equalis scilicet apotomis  $RE, RK$ . Centro  $O$ , intervallo  $OL$ , qua sit equalis ipsi  $BK$ , vel ipsi  $DE$ , describatur peripheria  $VLI$ . Ab equalibus  $OL, BK$ , auferatur commune  $OK$ . Remanebunt  $BO, KL$  aequales. Itaque  $KL$  est apotome. Et ideo peripheria  $VLI$  est segmentum Hexagoni aequale nimirum segmento  $GFHRG$ . at  $KI$  erit equalis ipsi  $RG$ : et  $LKL$  equalis ipsi  $RFGR$ . Eodem modo abscissa  $QK$ , qua sit equalis ipsi  $OL$ , de-

OL, describatur peripheria IMV. Ita completa erunt duo dimidiata segmenta IKL, IKM aequalia segmentis dimidiatis GFR, GKR. Connectatur recta CO secans peripheriam ENG. in puncto N. Ergo CN est semidiameter peripheria ENG, per definitionem circuli. & propterea reliqua NO tota erit extra ipsam peripheriam ENG. Tam recta ON, OL, item recta CN, CE, sunt aequales ex eadem definitione circuli. Sed OL, CE sunt aequales, ex constructione. Ergo ON, CN diametri sese committentes in puncto N unam rectam perpetuam efficiunt CNO. imo CNO est perpetua ex constructione. & propterea peripheria earum sese contingent, in puncto eodem N. Neque usquam praeterea sese aut contingent, aut secabunt, per XIII tertij. Similiter demonstrabimus EH, IM sese contingere in uno puncto, si recta DQ agatur. Ergo in Complemento Securicla inscriptum est segmentum Hexagoni, vel, quod idem est, duo semisegmenta, quae in uno tantum puncto duo segmenta aequalia lateralia contingunt. Ideo relinquatur praeterea subsidium spatium de Complemento, quod RESIDVVM SEGMENTI vocetur. Quod erat faciendum.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΥ  
ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

## ΚΥΚΛΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ Β,

ἢ καὶ Κυκλωδυναμικόν.

## CYCLOMETRICVM ELEMENTVM

POSTERIVS, QVOD ET CYCLODYNAMICON,

sive de potentia circuli dicitur.

Λ Η Μ Μ Α.

Εάν πλῆθος μεγεθῶν ὁποσωνῶν ἴσων μεγέθει πρὸς Σύμμετρον ἦ,  
καὶ ἐν ἑξῆς αὐτῶν τὰ αὐτὰ μεγέθη Σύμμετρον ἔσται.

L E M M A.

Si multitudo æqualium magnitudinum quotcun-  
que magnitudini cuiquam commensurabilis fuerit,  
& vna quoque ex ipsis eidem magnitudini com-  
mensurabilis erit.

*Si enim magnitudo quadam ex quinque magnitudinibus equali-  
bus composita alicui magnitudini sit commensurabilis, & contra re-  
liqua quatuor magnitudines eidem fuerint incommensurabiles: qua-  
tuor ergo magnitudines æquales quinta erunt incommensurabiles,  
per XIII decimi. Quod est ineptum. Tam vna igitur seorsim,  
quam quinque simul eidem erunt incommensurabiles. Idem cen-  
sendum, si magnitudo quadam composita ex aliis quatuor congene-  
ribus equalibus, & reliqua diuersi generis alicui magnitudini fuerit  
commensurabilis, modo congeneres sint commensurabiles relique.  
Nam, exempli gratia, sunt A, BBBB simul commensurabilia, ali-  
cui C. Si A, BBBB, id est, per priorem demonstrationem Lemmatis,  
AB, BBB, fuerint inter se commensurabilia, aio alterutram ipsarum  
magnitudinum ipsi C esse commensurabilem. Nam si AB, BBB sunt  
inter sese commensurabilia, & composita ex ipsis magnitudo alteru-  
tri AB,*

tri AB, BBB erit commensurabilis, per priorem partem XVI decimi Elementi. Itaque composita magnitudo ex illis, & alterutra pars, cum sint inter se commensurabiles, ut iam ostensum est, & praterea ex hypotesi composita sit commensurabilis ipsi C: erit ergo & reliqua eidem commensurabilis, per conuersam XII decimi. Quod erat demonstrandum.

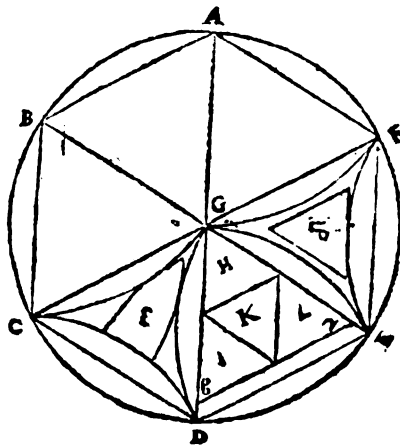
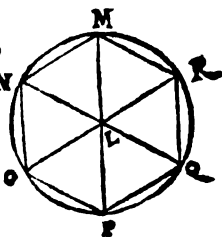
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α. Πρόβλημα.

Τῶν τριῶν ἑξαγώνων τέσσαρα ἀφελῶν μεγέθη ἀνομοιογενῆ, ἀλλήλοις τε καὶ τῷ τριῶν ἑξαγώνῳ.

PROPOSITIO I. Problema.

A Scalpro Hexagoni auferre quatuor magnitudines diuersi inuicem generis, quæ & inter sese, & ipsi Scalpro sint commensurabiles.

Esto circulus ABCD cum suo Hexagono illi inscripto. Triangulis Hexagoni GCD, GEF inscribantur Complementa Securicla. Rursus esto minor circulus MNOPQR cum suo Hexagono inscripto: cuius circuli diameter MP sit quinta pars quadrati a diametro AD maioris circuli ABCD. Per primam duode-



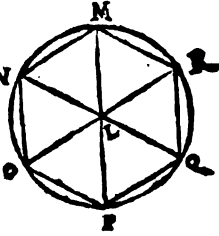
cimi erit ut quadratum MP ad quadratum AD, ita Hexagonum MNOPQR ad Hexagonum ABCDEF: & per XV quinti, ut Hexagonum ad Hexagonum, ita triangulum LOP ad triangulum GDE. Ergo per XI quinti, ut quadratum MP ad quadratum AD, ita triangulum LOP ad triangulum GDE. Sed quadratum MP est quinta pars quadrati AD. Ergo triangulum LOP est quinta pars trianguli GDE. Cui equalia sunt quatuor H, I, K, L. & trapezium DGE erit quinta pars trianguli GDE. Rursus eidem aequale δ

I 3 inscri-

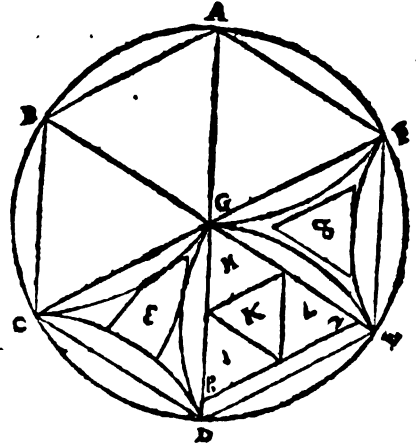


inscribatur in Complemento Securi-  
cula trianguli GEF. Fieri enim  
potest, cum altitudo trianguli LOP sit minor semidiametro. De-  
nique in Complemento trianguli GCD inscribatur segmentum  $\epsilon$ ,  
per ultimam Cycloperi-

metrici. Ita in Scalpro  
Hexagoni GCD Com-  
plementum habet in-  
scriptum segmentum



cum suo Residuo. In Scalpro autem  
GDE Complementum habet triangulum  
 $\delta$  cum suo Residuo. Ablata igitur sunt  
ex Scalpro quatuor magnitudines, Se-  
gmentum, Triangulum cum Residuis



suis, quae sunt diversi generis. Quod est primum. Scalprum Hexa-  
goni constat ex quinque segmentis, & residuo Segmenti. Ergo cir-  
culus constat ex triginta Segmentis, & sex Residuis segmenti.  
Præterea Scalprum GDE constat ex quinque triangulis aequalibus  
ipsi LOP, aut ipsi  $\delta$ , & uno Segmento. Ergo circulus constat ex  
triginta triangulis  $\delta$ , & sex segmentis. Segmenta igitur xxx de  
circulo dempta relinquunt sex residua segmenti. Et rursus Segmenta  
sex de circulo dempta relinquunt triginta triangula. Ergo sex Re-  
sidua segmenti, & xxx triangula sunt commensurabilia xxxvi  
segmentis. & per priorem partem demonstrationis Lemmatis supe-  
rioris, Triangulum, & Residuum segmenti sunt commensurabilia  
inter se. Porro Triangulum GEF constat ex tribus segmentis, &  
Complemento hoc est, ex triangulo  $\delta$ , & eius Residuo. Sed idem  
Triangulum, hoc est illi aequale GDE, constat ex quinque triangu-  
lis aequalibus ipsi  $\delta$ . Ablato utrinque triangulo, remanent tria se-  
gmenta cum Residuo Trianguli aequalia quatuor triangulis. Qua-  
re quatuor triangula sunt commensurabilia tribus Segmentis cum  
Residuo Trianguli. & per proximi Lemmatis demonstrationem  
alteram, unum Segmentum, & unum Trianguli Residuum simul  
uni Triangulo sunt commensurabilia. Erunt igitur & commensu-  
rabilia

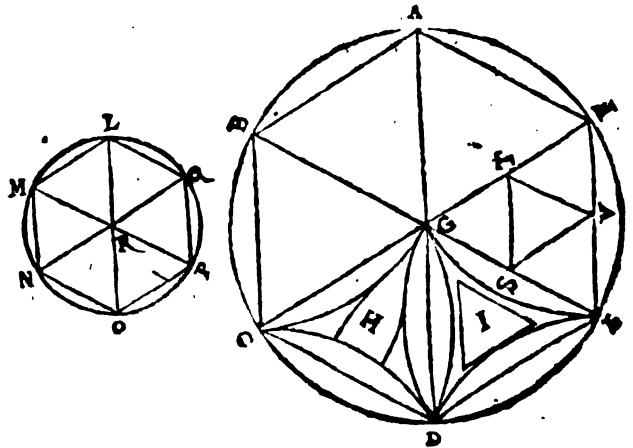
rabilia uni residuo segmenti, per conuersam XII decimi. Quare magnitudo composita ex residuo trianguli & segmento est commensurabilis tam Triangulo, quam Residuo Segmenti. Jam quatuor Triangula  $\delta$ , cum totidem Residuis Trianguli sunt equalia quatuor Complementis, hoc est tribus Segmentis  $\epsilon$ , cum suis Residuis, item uni Triangulo cum suo Residuo. Sed unum Residuum Trianguli cum tribus segmentis demonstratum est equale quatuor Triangulis. Ergo reliqua tria residua Segmenti cum reliquo triangulo reliquis quatuor Residuis Trianguli sunt equalia. Ac proinde unum Residuum Trianguli uni Triangulo cum Residuo Segmenti est commensurabile, per antecedens Lemma. Sed Triangulum, & Residuum Segmenti ostensa sunt commensurabilia. Ergo tam Triangulum, quam residuum segmenti ipsi Residuo Trianguli sunt commensurabilia. Tria igitur inter se sunt commensurabilia: nempe utrumque Residuum, & Triangulum. Sed Residuum & segmentum simul sunt ostensa Triangulo commensurabilia. Erunt igitur & commensurabilia Residuo utrique, per antecedens Lemma. Quare si residuum Trianguli cum segmento, est Residuo Trianguli commensurabile, ergo Segmentum, & triangulum sunt commensurabilia. Quatuor igitur commensurabiles magnitudines de Scalpro Hexagoni abstulimus: Triangulum, Segmentum, Residuum Trianguli, Residuum Segmenti. Quod est secundum. Rursus Complementum est compositum ex duabus magnitudinibus commensurabilibus, siue Triangulo cum Residuo Trianguli, siue Segmento cum Residuo Segmenti. Ergo tota magnitudo alterutri ipsarum partium erit commensurabilis, per XVI decimi. Præterea Scalprum GCD constat ex Complemento, & quatuor Segmentis ipsi Complemento commensurabilibus. Ergo tota magnitudo alterutri ipsorum est commensurabilis, per eandem XVI. Et proinde Scalprum totum Complemento commensurabile erit & quatuor magnitudinibus per se sumptis commensurabile. Quod erat faciendum.

Ὁ κύκλος διὰ τῆς περιμέτρου ἔξ τμημάτων ἑξαγώνου ἴσους αὐτὸν ἔχει φορμῆς.

## PROPOSITIO II. Theorema.

**Circulus potest triginta sex segmenta Hexagoni ipsi circulo inscripti.**

Circuli LNOP, cui inscriptum sit Hexagonum, LMNOPQ, diameter LO, sit quinta pars quadrati a diametro AD circuli ACDE, cui inscriptum est Hexagonum ABCDEF. Ergo, ut supra demonstratum est, triangulum RNO trianguli GDE est quinta pars. In Complementis Triangulorum GCD, GDE inscribantur Segmentum H, & triangulum I aequale triangulo RNO. Itaque Complementum trianguli GCD constat ex segmento, & Residuo segmenti. Similiter Complementum trianguli GDE constat ex triangulo, & Residuo Trianguli, ut in proxima demonstratione. Triginta segmenta cum sex Residuis Segmenti sunt equalia uni circulo. Item triginta Triangula cum sex segmentis sunt equalia uni circulo, ut proxime ostensum est. Sed sex segmenta cum totidem residuis segmenti sunt equalia sex Complementis, hoc est sex triangulis, & sex Residuis Trianguli. Ergo triginta segmenta & totidem triangula cum sex triangulis & totidem Residuis trianguli sunt equalia duobus circulis. Atque adeo triginta sex triangula, & triginta segmenta cum sex residuis trianguli sunt equalia eisdem duobus circulis. Rursus, ut proxima demonstratione ostensum est, tria residua segmenti cum triangulo sunt equalia quatuor residuis trianguli:



trianguli: & consequenter sex residua segmenti cum duobus triangulis sunt equalia octo residuis trianguli. Quare triginta segmenta cum sex residuis segmenti & duobus triangulis sunt equalia triginta segmentis cum octo residuis trianguli. Sed triginta segmenta cum sex residuis segmenti & duobus triangulis excedunt circulum duobus triangulis. Ergo triginta segmenta cum octo residuis trianguli excedunt circulum duobus triangulis. Supra vero diximus triginta sex triangula cum triginta segmentis, & sex residuis trianguli esse equalia duobus circulis. Ergo triginta sex triangula cum triginta segmentis, & octo residuis trianguli excedent duos circulos duobus triangulis. Erunt igitur triginta segmenta cum octo residuis trianguli; item triginta sex triangula simul sumpta triginta octo triangulis cum triginta segmentis & sex residuis segmenti simul sumptis equalia. Auferantur utrinque triginta segmenta, & triginta sex triangula. Remanent duo Triangula cum sex Residuis trianguli equalia octo residuis trianguli. Auferantur utrinque sex residua trianguli. Remanent duo Triangula equalia duobus residuis Trianguli, atque adeo equalia complemento GDE: cum duo triangula & duo residua trianguli sint equalia duplo complementi GDE. Ergo Complementum dividitur in duas aequales magnitudines, Triangulum, & Residuum Trianguli. Est igitur Complementum aequale duobus triangulis. In triangulo autem Hexagoni sunt quinque triangula. Complementum vero constat ex duobus. Ergo Triangulum Hexagoni constat ex tribus triangulis & Complemento. Sed constat etiam ex tribus segmentis Hexagoni, & Complemento. Ergo tria segmenta Hexagoni sunt equalia tribus triangulis. Et proinde in Triangulo Hexagoni GCD sunt quinque segmenta aut quinque residua segmenti, aut quinque Triangula, aut quinque Residua Trianguli. Et proinde totum Scalprum Hexagoni est sex segmentorum: & ideo circulus totus xxxvi segmentorum: totidem Residuorum segmenti: totidem Triangulorum: totidem Residuorum Trianguli.

K

ALITER

## ALITER II.

Quatuor Triangula tribus segmentis, & uni residuo trianguli equalia sunt: item quatuor Residua Trianguli tribus Residuis Segmenti, & uni Triangulo equalia, ut proxima demonstratione patuit. Hoc est: quatuor

Complementa quatuor Complementis sunt equalia.

Addantur bina Complementa: nempe triangulum cum suo Residuo, Segmentum cum Residuo

Segmenti. Erunt aut quatuor segmenta cum uno

Trianguli Residuo, &

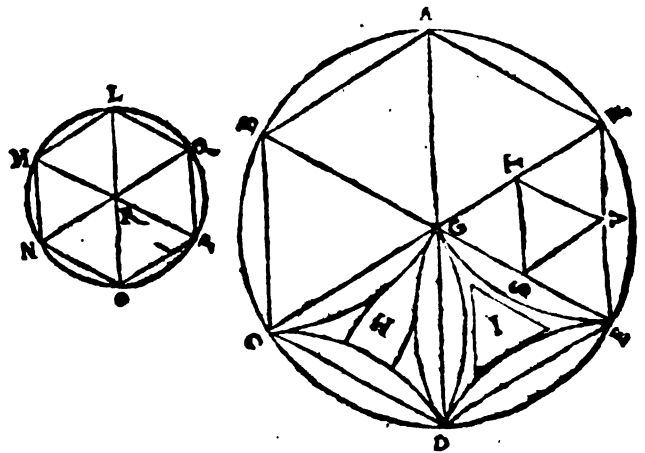
consequenter quatuor residua Segmenti cum uno triangulo: aut tria

segmenta cum Residuo Trianguli & residuo Segmenti: & consequenter tria residua segmenti cum triangulo & segmento equalia

quinque triangulis cum totidem residuis trianguli. Sit prius. Ergo quatuor segmenta cum residuo trianguli sunt equalia quinque triangulis.

At in triangulo Hexagoni GCD quatuor segmenta cum residuo segmenti sunt equalia quinque triangulis. Ergo residuum trianguli, & residuum segmenti sunt equalia.

Quare per communem sententiam III, Triangulum segmento est aequale, ut supra: propterea quod à Complementary ablata triangulum aut segmentum, relinquunt residua equalia. Sit posterius. Ergo tria segmenta cum residuo segmenti & residuo trianguli sunt equalia quinque triangulis, hoc est, triangulo Hexagoni. Sed triangulum Hexagoni constat ex tribus segmentis, & Complementary. Ergo Complementary est aequale residuo trianguli, & residuo segmenti. Sed idem constat ex segmento & residuo segmenti; aut ex triangulo, & residuo trianguli. Ergo residuum segmenti, & residuum trianguli sunt equalia, ut supra: & propterea segmentum & triangulum equalia.



ALITER

## ALITER III.

Triginta segmenta cum sex residuis segmenti sunt equalia circulo, ut iam ostensum est non semel. Ergo triginta duo segmenta cum octo residuis segmenti sunt equalia uni circulo, & duobus Complementis: id est, triginta triangulis, octo segmentis, & duobus residuis segmenti. Sed octo segmenta cum duobus residuis segmenti sunt equalia bis triangulo GCD, hoc est decem triangulis. Ergo quadraginta Triangula sunt equalia uni circulo, & duobus Complementis. Sed, triginta segmenta cum sex residuis trianguli, item triginta sex triangula, sunt equalia duobus circulis, ut paulo ante demonstrabatur. Triginta igitur segmenta cum quadraginta triangulis, & sex residuis trianguli sunt equalia duobus circulis cum duobus Complementis præterea. Auferantur igitur triginta segmenta cum sex residuis trianguli, item triginta sex triangula, id est duo circuli, a XL triangulis, & XXX segmentis, & VI residuis Trianguli: hoc est, a duobus circulis, & duobus Complementis. Remanebunt quatuor triangula duobus Complementis equalia. Triangulum igitur est æquale residuo suo, ut supra.

## ALITER IIII.

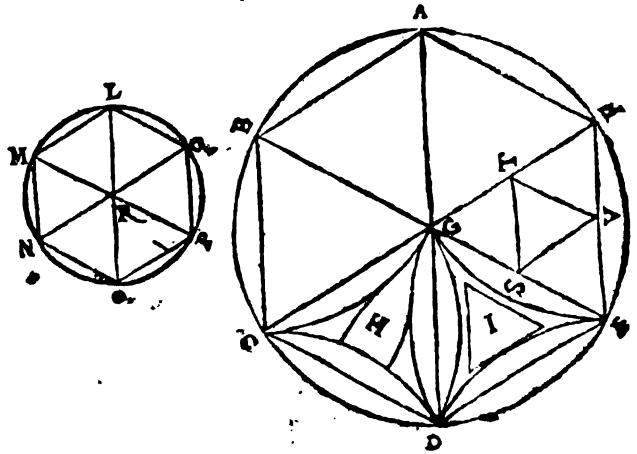
Unum residuum trianguli, & tria segmenta sunt equalia quatuor Triangulis, ut supra demonstratum est. Ergo decem residua trianguli cum triginta segmentis sunt equalia quadraginta triangulis. Rursus demonstratum est, triginta duo segmenta cum octo residuis segmenti esse equalia uni circulo, & duobus Complementis. Atqui duo segmenta cum octo residuis segmenti sunt equalia decem triangulis, ut antea ostensum est. Auferantur utrinque tricena segmenta. Relinquuntur X Residua trianguli decem triangulis equalia. Triangulum ergo suo Residuo æquale, ut antea.

K 1

ALITER

## ALITER V.

Triginta segmenta cum sex residuis segmenti sunt aequalia circulo. Item triginta triangula cum sex segmentis circulo sunt aequalia. Igitur triginta segmenta de circulo dempta relinquunt sex residua segmenti. Et sex segmenta de circulo dempta relinquunt triginta triangula. Ergo per xv quinti, triginta segmenta de circulo dempta relinquunt sex triangula. Sed relinquebant & sex residua segmenti. Ergo sex residua segmenti sex triangulis sunt aequalia. & propterea Triangulum Hexagoni constans ex quinque triangulis constabit & ex totidem residuis segmenti. Sed constat & ex quatuor segmentis cum residuo segmenti. Ablato utrinque residuo segmenti, remanent quatuor segmenta quatuor residuis segmenti aequalia. Ergo triginta segmenta cum sex residuis segmenti sunt triginta sex segmenta.



## ALITER VI.

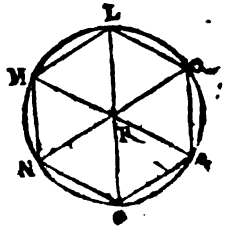
Secetur triangulum GEF in quatuor triangula & sibi inuicem & toti aequalia: quale triangulum GST, quod erit isopleurum. & constat triangulum isopleuron non posse secari in multitudinem triangulorum aequalium, & toti equangulorum, nisi multitudo fuerit numerus quadratus. Quia igitur Triangulum GST, est quarta pars trianguli GEF ex constructione: & eiusdem triangulum RNO est quinta pars: qualium quinque erit triangulum GST, talium quatuor erit triangulum RNO. Est autem triangulum GST maius segmento. Nam quatuor triangula GST componunt triangulum GEF. At quatuor segmenta sunt minora triangulo eodem GEF, aut, quod idem est, triangulo GCD. Rur-

sus

sus Complementum maius est eodem triangulo GST. Nam eius  
 altitudo & latitudo potest demonstrari longe maior altitudine &  
 latere eiusdem trianguli GST. Porro Complementum est ostensum  
 commensurable segmento, & triangulo RNO. Sed RNO est com-  
 mensurable ipsi GST. Ergo per conuersam XII decimi, GST est  
 Complemento commensurable. Habemus igitur tres magnitudines  
 inaequales Commensurabiles, Segmentum minimam, triangulum GST  
 mediam, Complementum maximam. Et quidem vigintiquatuor  
 Triangula GST cum sex segmentis componunt circulum. Rursum  
 eundem componunt viginti quatuor segmenta cum sex complementis.  
 Ergo per VIII quinti, maior est ratio XXIIII triangulorum RST  
 ad VI segmenta, quam XXIIII segmentorum ad VI Complementa.  
 Sunt autem illa magnitudines commensurabiles, ut iam dictum est.  
 Ergo habent rationem inter se, quam numerus ad numerum, per VI  
 decimi. Erit igitur minor magnitudo maioris aut pars, aut partes,  
 per IIII & V septimi: quandoquidem illi numeri, ad quos rationem  
 habent, communem mensuram habent saltem unitatem. Infiniti  
 vero numeri sumi possunt, quorum minimus vicesies quater sumptus  
 cum maximo sexies componat summam eandem, quam medius  
 quater & vicesies sumptus cum sexies minimo. Neque vera finis  
 aut modus futurus est eiusmodi numerorum. Finiamus igitur me-  
 dium, & sit, ut iam diximus, triangulum GST quinque, quantorum  
 viginti triangulum totum GEF. Quia igitur segmentum minus est,  
 quam Triangulum GST, minus erit proinde, quam quinque. Erit  
 igitur aut tria, aut quatuor, & nihil praeter ea. Esto primum tria.  
 Ergo Complementum erit undecim. Nam vicesies quater tria, cum  
 sexies undecim component eandem summam, quam vicesies quater  
 quinque cum sexies tribus. Erit enim summa CXXXVIII. Quae  
 distributa in tria dabit quadraginta sex segmenta in circulo. Hoc  
 modo Residuum Segmenti fuerit aequale segmentis duobus, cum duo-  
 bus trientibus segmenti: quod est ineptissimum, igitur ὀρθολογικῶς  
 ἀπίθανον, ut Geometricè refutandum non sit. Omnino igitur Se-  
 gmentum erit quatuor, quantorum quinque triangulum GST. Ergo



Complementum erit octo: atque ita duplum segmenti. Quare segmentum & residuum segmenti sunt equalia. ac propterea Complementum aequale duobus Segmentis: & totum scalprum sex segmentis, vel sex triangulis RNO. Et totus igitur circulus aequalis XXXVI segmentis: totidem residuis segmenti: totidem triangulis RNO: totidem residuis eiusdem trianguli RNO.

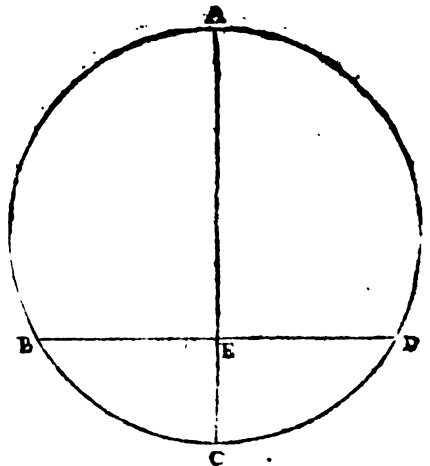
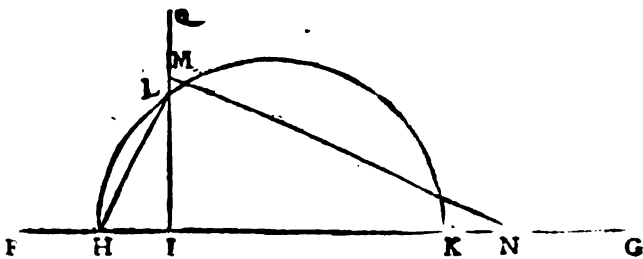


ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ. Πρόβλημα.

Κύκλος δοθέντος ὅ ἐμβαδὸν ἀρεῖν.

PROPOSITIO III. Problema.

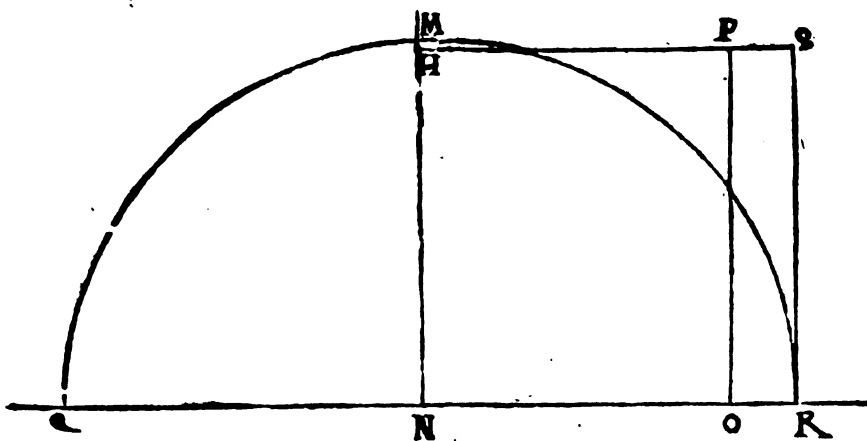
Circuli dati aream inuenire.



Circuli dati ABCD inuenienda sit potentia. Inscribatur in ipso latus trigoni isopleuri BD. Ex infinita linea FG abscindatur recta HK aequalis potentia Hexagoni circulo dato ABCD inscribendi, hoc est, rectangulo sub BD, EA. Super eadem recta HK semicirculo HLK descripto, abscindatur recta HI, quinta pars ipsius HK, per IX sexti. Signo I, erecta perpendiculari infinita IQ, per XI primi, connectatur recta HL: que per Corollar. VIII sexti, erit media proportionalis inter HK, HI. Quia igitur ut est longitudo HK ad longitudinem HI, ita quadratum HK ad HL: erit quadratum HL quinta pars quadrati HK. Ex infinita perpendiculari IQ abscindatur recta IM equalis ipsi HL, per III primi. Ex infinita autem FG itidem abscindatur recta

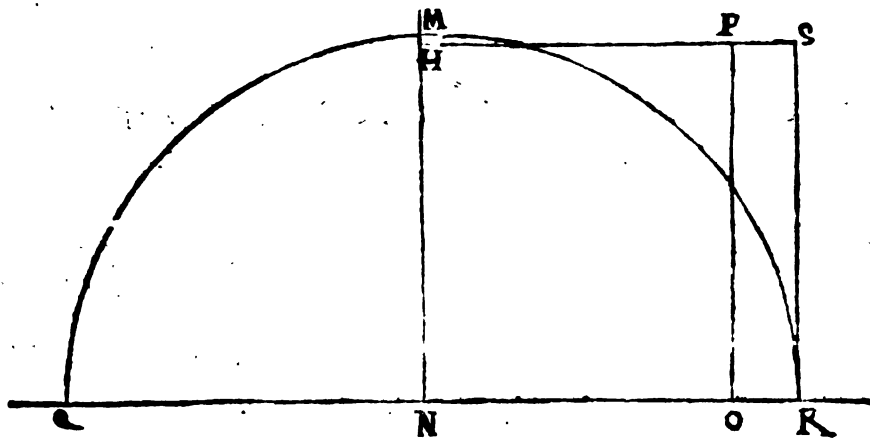
recta IN aequalis ipsi HK. Connectatur recta MN. Itaque quadratum ex MN erit aequale quadratis ex IM, IN, per XLVII primi: hoc est quadratis ex HL, HK. Sed quadratum HL est quinta pars quadrati HK, ex constructione. Ergo quadratum MN est sextuplum quadrati HL. quod aio esse  $\tau$   $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  circuli dati ABCD. Cum enim potentia Hexagoni, hoc est, quadratum HK, sit aequalis triginta segmentis ipsius Hexagoni, ut proxime demonstratum est, quadratum autem HL sit eius pars quinta: poterit igitur quadratum HL sex segmenta Hexagoni. Quare quadratum MN sextuplum quadrati HL poterit sexies sex segmenta Hexagoni circulo ABCD inscribendi. Erit igitur quadratum HK  $\tau$   $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  ipsius propositi circuli ABCD, per V definitionem, adiuvante etiam antecedente.

## ALITER.



Sit diameter AC circuli propositi ABCD expositarum partium XX. Ex interminatis QR, NM sese normaliter secantibus in N abscindantur NO quidem ipsi EA, NR autem XVIII vicefimis diametri AC aequalis. Igitur qualium XV est NO (nempe tres quadrantes diametri) talium NR est XVIII: aut qualium NO est V, talium NR est VI. Ex NM & QR abscindantur NH, NQ ipsi BD aequales. Quare NQ, NH inter se erunt aequales, per communem sententiam primam. Compleantur parallelogramma rectangula NP, NS: qua quidem erunt inter se, ut longitudines NO, NR, per primam.

primam VI. Erant igitur ut V ad VI: hoc est, ut XXX ad XXXVI. Sed rectangulum NP contentum sub NO, NH, hoc est, sub EA, BD, est aequale Hexagono. Ergo per antecedentem rectangulum NS est



aequale circulo. Et propterea circa QR semicirculo descripto QMR, recta NM media proportionalis inter NR, NQ, id est, NH, vel EA, erit aequalis τῷ ἑμβλάδῳ prius inuenito. Quod erat faciendum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ex δὴ τέτων φανερόν, ὅτι τὸ ἑμβλάδον ἔκ κύκλου ἰσὸν ἐστὶν ὀρθογωνίῳ τῷ ὑπὸ τῶν πλευρῶν τριγώνου ἰσοπλευροῦ ἔκ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένῳ καὶ ἐνεία δεκάτῳ τῆς διαμέτρου περιεχομένῳ.

## COROLLARIUM.

Ex his patet, circuli aream esse æqualem rectangulo sub latere trianguli æquilateri in eo ipso inscripti circulo, & nouem decimis diametri concepto.

Nam qualium diametrus AC fuerit XX, talium XVIII posita est NR. Ergo qualium diametrus AC est X, talium est IX recta NR. A diametro igitur AC auferenda sunt  $\frac{2}{10}$  per IX sexti, ἔσῃ habebis NR. Ἐκ.

## Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ex hac demonstratione, & ex antecedenti, manifestum est, si diametrus circuli fuerit expositarum partium XV I, τὸ ἑμβλάδον maius fore, quam 199, minus autem, quam 200: cum Hexagonum minus sit, quam 167, cuius quinta pars composita cum ipso faciet potentiam minorem, quam 200.

Π Ρ Ο.

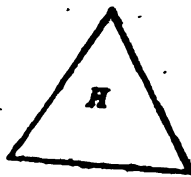
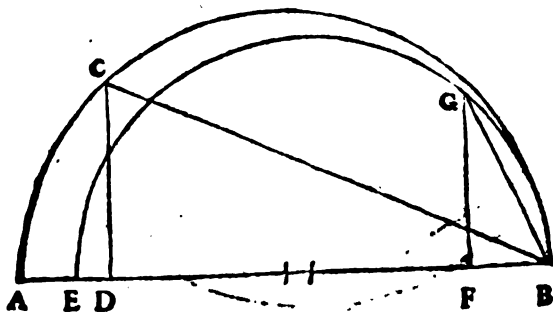
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ. Πρόβλημα.

Τὸ εἰμαδὲ δοθέντι περιαναγράψαι τὸν κύκλον ἑπὲρ ἐστὶ εἰμαδὸν.

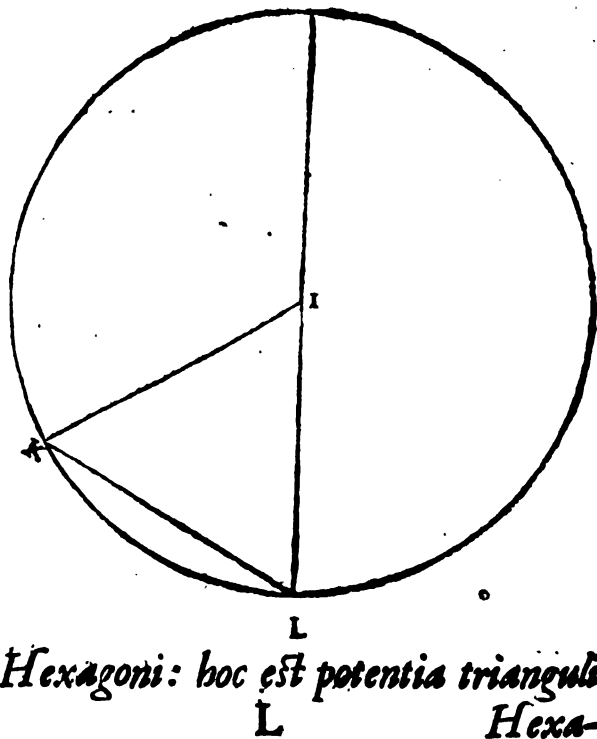
PROPOSITIO IIII. Problema.

Circuli area data, describere circulum, cuius sit area.

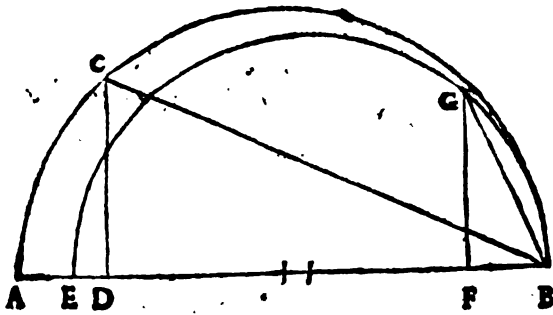
Potentia circuli data  $AB$  sit inveniens congruens circulus. Descripto super ea semicirculo  $ACB$ , auferatur sexta pars eius  $AD$ . Tum erecta perpendiculari  $DC$ , connectatur recta  $CB$ : qua per Coroll. VIII sexti, erit media proportionalis inter  $AB, DB$ : hoc est,



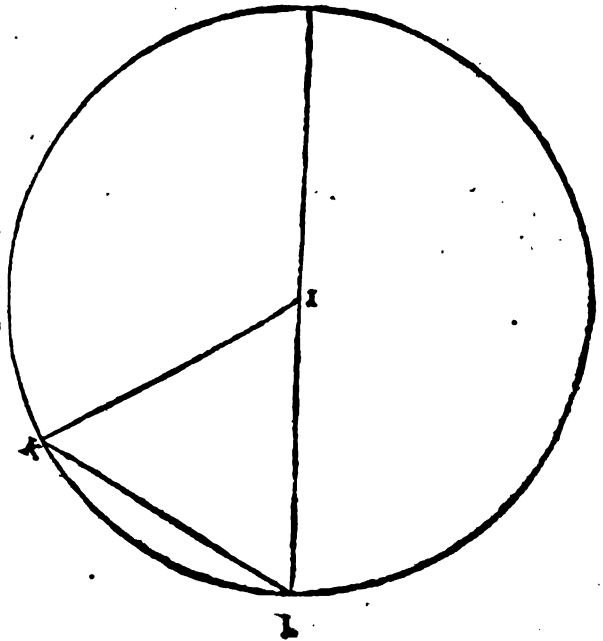
inter sex, & quinque, ex constructione. quia qualisum  $AB$  est sex, talisum  $DB$  erit quinque. Erit ergo  $CB$  Hexagoni potentia circulo inscripti, cuius circuli potentia est recta data  $AB$ , cui potentia  $BC$  aequalis longitudo  $EB$  auferatur ex longitudine  $AB$ . Super qua descripto semicirculo  $EGB$ , abscissa  $FB$ , sexta parte ipsius  $EB$ , & erecta perpendiculari  $FG$ , erit iuncta  $BG$  sexta pars Hexagoni: hoc est potentia trianguli



Hexa-



Hexagoni: quod est aquilaterum, per XV quarti. Triangulo igitur aquilatero cuiuscunque H fiat simile triangulum I K L, aequale autem quadrato BG, per XXV sexti. Rursus centro I, intervallo IL, describatur circulus K L, qui est circulus quaesitus: cum I K L ex constructione sit sexta pars quadrati ipsius EB, hoc est ipsius Hexagoni. Quod erat faciendum.



## ALITER.

Idem expeditius fiet, si praeter propositum  $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  habeatur  $\epsilon\gamma$  alius circuli cuiuscunque  $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$ , per antecedentem:  $\epsilon\zeta$  fiat ut  $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  illius circuli ad  $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  propositum, ita diameter circuli ad quartam magnitudinem, per XII sexti. qua erit diameter quaesiti circuli, per secundam duodecimi, quam miror cur Euclides demonstravit violenta  $\alpha\pi\alpha\gamma\omega\gamma\eta$  eis  $\tau\epsilon$   $\alpha\delta\omega\alpha\tau\omicron\nu$ , cum ex antecedente potuerit demonstrare quadratum circuli ad quadratum circuli esse, ut quadratum diametri, ad quadratum diametri. potentia autem circuli est minor diametro. Ergo accommodata circulo erit latus Polygoni alicuius circulo inscripti,  $\epsilon\zeta$  c.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε. Θώρημα.

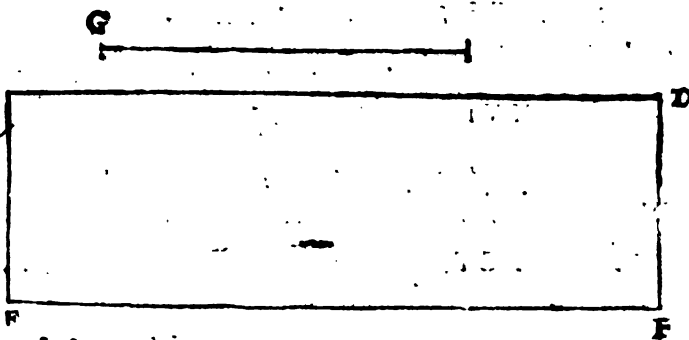
Τὸ ἑμβάδον ἑκ κύκλου περιετλιῶ ἐν ἑκ κέντρῳ ὡς ἀβαλλόμενον πλά-  
 τῳ ποιῆ διττῶν ἑκ κύκλου ἡμιπεριμέτρου ἐλάσσον.

PROPOSITIO V. Theorema.

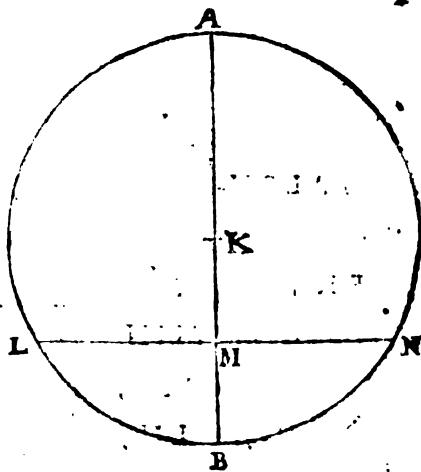
Potentia circuli ad semidiametrum applicata la-  
 titudinem facit rectam semiambitu circuli mi-  
 norem.

Recta G, ἡ ἑμβάδον scilicet circuli ALBN, cuius diametrus AB,  
 centram K, applicetur per XLIII primi, ad KA semidiametrum,  
 vel ei sumptam aequalem EC, & faciat latitudinem CD, id est, EF.  
 Aio EF esse minorem semiperimetro circuli propositi AB. Esto dia-  
 metrus AB expositarum partium XVI. Circulo autem ALBN ac-

commodetur latus  
 trigoni isopleurii LN,  
 secans diametrum  
 AB in M. Itaque,  
 ut alibi ostensum  
 est, recta LN, MA  
 potentia tantum in-



ter se sunt commensurabiles. Hexa-  
 goni autem potentia est aequalis rectan-  
 gulo sub iisdem MA, LN. Ergo per vice-  
 simam secundam x Elementi, potentia  
 Hexagoni est recta ἀλογῶ, quae dici-  
 tur μέσον. Sed & quinta eius pars  
 eidem commensurabilis est ἀλογῶ, per  
 XXIIII eiusdem. Ergo tam Hexa-  
 gonum, quam quinta pars Hexagoni  
 ipsi ἑμβάδῳ ex utraque composito erunt  
 commensurabilia. Ideo iterum per eandem XXIIII, totum ἑμβάδον  
 est ἀλογόν, τὸ λεγόμενον μέσον. Igitur τὸ ἑμβάδον ad ῥητιῶν KA.



L 2

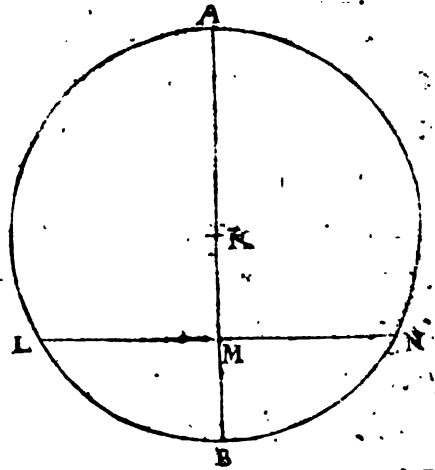
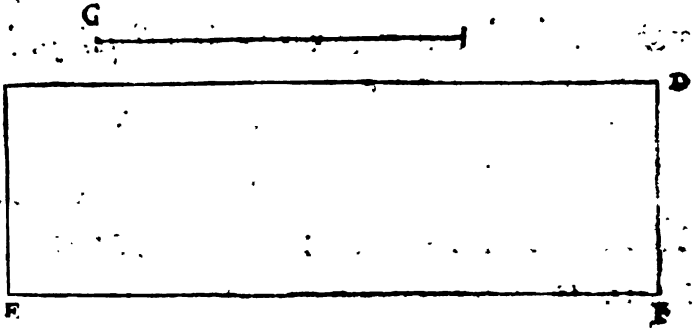
vel,

vel ei aequalem  $CE$  applicatum faciet latitudinem  $EF$  ipsi  $AK$ ,  
 vel ei sumpta aequali  $EC$ , potentia tantum commensurabilem, per  
 $XXIII$  decimi. Quae

sane minor est,

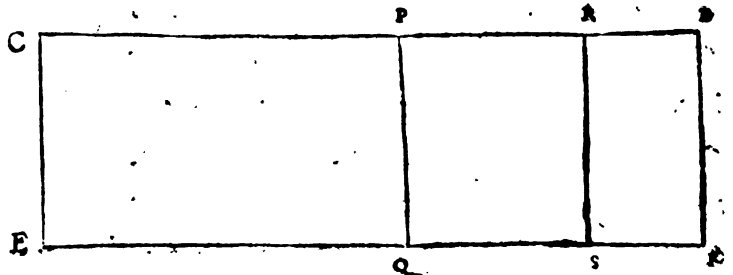
quam  $XXV$  sextade-  
 cima diametri  $AB$ .  
 Si enim esset precise  
 $XXV$ , esset  $\tau\theta$   $\epsilon\mu\beta\alpha$   
 $\delta\theta\upsilon$  toties quinque

$\epsilon\zeta$ , viginti sextarum decimarum dia-  
 metri, quot sunt tales sextadecima in  
 semidiametro. Et propterea  $\tau\theta$   $\epsilon\mu\beta\alpha$   
 $\delta\theta\upsilon$  esset 200 precise. Atqui minus est,  
 quam 200, per Scholion III huius. Est  
 igitur recta  $EF$  minor, quam  $XXV$  se-  
 xtadecima diametri. At circuli, cuius  
 diametrus  $XVI$  expositarum partium,  
 semiperimetrus est maior, quam sint  
 $XXV$  sextadecima diametri. Ergo mul-  
 to minor est  $EF$ , quam semiambitus circuli. Quod erat demon-  
 strandum.



## ALITER.

Repetatur eadem constructio, sitque rectangulum  $CF$  aequale  
 circulo  $ALBN$ . Abscindatur recta  $EQ$  aequalis ipsi  $LN$ , hoc est la-  
 teri trigoni isopleuri circulo  $ALBN$  inscripti. Rursus esto rectan-  
 gulum  $ER$  aequale He-  
 xagono circulo  $ALBN$   
 inscribendo, hoc est,  
 rectangulo sub  $LN$ ,  
 vel  $EQ$  (ex con-  
 structione) contexto.



Ergo per primam VI, erit  $EP$  ad  $ER$ , ut  $EC$  longitudo ad lon-  
 gitudi-

gitudinem MA, cum eandem altitudinem habeant rectam EQ,  
 vel LN. Sed EC, hoc est KA, semidiameter circuli ALBN, ad  
 MA, habet subsesquialteram rationem. Ergo EP ad ER habet sub-  
 sesquialteram rationem. Qualem igitur XXX est ER, talium XX  
 est EP. Atque adeo EP est aequale XX segmentis Hexagoni, ut  
 ER triginta segmentis. Qualem igitur duum est EP, talium trium  
 est ER. Ideoque qualem ES est trium, talium duum est EQ, per  
 conuersam prima sexti. Igitur qualem nouem est quadratum a  
 recta ES, talium quatuor est a recta EQ. Rursus esto diameter  
 AB circuli ALBN expositarium partium 120. Qualem igitur 3600  
 est quadratum a semidiametro, KA, hoc est a recta EC, talium  
 10800 est quadratum a recta LN, id est, a recta EQ, ex constru-  
 ctione, per XII tertiodecimi Elementi. Quia uero iam demonstra-  
 tum est, quadratum ab EQ esse ad quadratum ab ES, ut qua-  
 tuor ad nouem: Ergo recta ES est commensurabilis recta EQ, quam  
 est quadrato ab EC esse potentia commensurabilem, per XXIII  
 decimi demonstrari poterat. Ergo qualem 10800 quadratum ab  
 EQ, talium 24300 est quadratum ab ES. Sed rectangulum ER  
 ad rectangulum ED, est, ut XXX ad XXXVI, vel ut V ad VI. Ergo  
 per conuersam prima VI, ES ad EF est ut V ad VI. Et proinde,  
 quadratum ab ES ad quadratum ab EF, ut XXV ad XXXVI. Ita-  
 que qualem 24300 ostensum est quadratum ES, talium 34992 est  
 quadratum a tota EF. Sed semiperiphæria ANB est 36000, qua-  
 lium nimirum quadratum a diametro est 14400. Quare recta  
 EF, hoc est τὸ πλάτθ εἰς ἑμβάδων πρὸς τὸ ἐν εἰς κέντρον ἑξάβαλλ-  
 λομύρε, est minor semiperimetro circuli, excessu  $\frac{7}{143}$ . Quod erat  
 demonstrandum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α.

Εξ δὲ τούτων φανερόν, ὅτι τὸ ἑμβάδων εἰς κύκλου εἰλάσων ἐστὶ εἰς τετ-  
 γώνου ὀρθογώνου, εἰ τῶν τῶν ὀρθῶν γωνίῶν περιεχουσῶν πλευρῶν ἢ μὲν τῆ  
 ἐκ κέντρον, ἢ δὲ τῆ περιμέτρου ἴση ἐστίν.



## COROLLARIUM I.

Ex his constat, quod potentia circuli minor est Triangulo rectangulo, cuius eorum, quæ rectum angulum continent, laterum, alterum quidem semidiametro, alterum autem ambitui circuli est æquale.

Ergo Archimedis prima propositio περὶ μετρήσεως κύκλου, vitiosa est: ut taceam, quod minorem sumit ambitum siue perimetrum, quam re vera sit. Itaque cum id demonstrare non posset, usus est τῇ εἰς ἀδιώατον ἀπαγωγῇ, quæ est ἀλογικὴ, cum ea accommodari possit ad quodlibet triangulum rectangulum, siue minus, siue maius propositio: quandoquidem ea utitur ad falsum colligendum. Ex his quoque colligitur falsitas τῶν τετραγωνισμῶν γραμμῶν, de quibus veteres scripserunt, inter quos Hippias: præsertim illius, quam excogitauerat Dinostratus, quæ, ut et alia, falso τετραγωνισμοῦ dicta sunt, cum ea non ad τετραγωνισμὸν κύκλου idonea sint, sed ad quadrantem perimetri duntaxat investigandum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β.

Ἐτι φανερόν, ὅτι κλίνδρος Ἐπιφθάλια ἔχει τὸ ὕψος τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως ἴσον ἔχοντες μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τῆς κύκλου.

## COROLLARIUM II.

Præterea patet superficiem cylindri, cuius altitudo æquet diametrum basis, esse maiorem quadrupla circuli.

Τὸ ἑμβάδον ad semidiametrum applicatum facit latitudinem rectam minorem semiperimetro. Ergo quadruplum ἑμβάδου ad totam diametrum applicatum faciet πλάτος rectam minorem tota perimetro. At cylindri superficies est equalis rectangulo sub tota diametro, et tota perimetro contento. Maior igitur superficies cylindri quadrupla circuli superficie. Quare quadruplum circuli minus est, quam

quam 797, aut non multo maior. Superficies autem cylindri maior, quam 809, qualium nempe totius diametri quadratum fuerit 256. Magnum sane prestitit diuinus Archimedes, quod hac proxime absunt à vero. Nihil tamen fecit, quod hac sunt ἀγωμέτηθα. Imo tanto ingenio indigna sunt omnia. Denique hoc Corollarium aduersatur iis, quæ idem Archimedes per impossibile conatur demonstrare XIII, & XIII prioris πρὸς τὴν σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

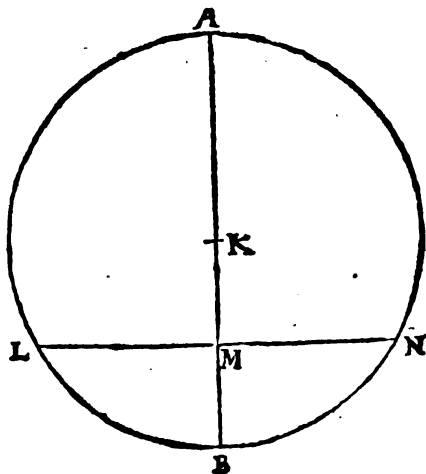
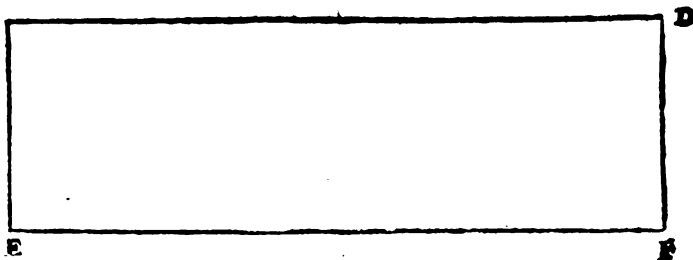
ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Πρὸς τέτοις δῆλον, ὅτι τὸ διπλάσιον ἑὶ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ ἑ κέντρος ἀβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ διτταῖαν ἑ τριπλασίαν ἑ διαμέτρου μείζων ἐλάσσονι, ἢ τῶν δέκα ἑβδομηκοσομίων.

COROLLARIUM III.

Patet præterea, duplum circuli ad semidiametrum applicatum, latitudinem facere rectam triplo diametri maiorem parte, quæ sit minor, quam decem septuagesimæ primæ.

Ostensum enim est, πλάτος EF quod fit a circulo ad semidiametrum applicato, posse talia 34992, qualia quadratum semidiametri EC 3600, aut qualia tota diametri AB circuli ALBN 14400. Quod si duplum circuli ad eandem EC applicetur: erit πλάτος EF quoque duplum: & propterea quadratum a dupla EF erit quadruplatum, ut futurum sit 139968, qualium quadratum a tripla diametri 129600, utique minus, quam quadratum a dupla EF. Excessus enim est  $\frac{2}{35}$  duntaxat. Jam



υπα

una septuagesima prima de longitudine diametri, quam exposuimus partium 120, est  $1\frac{42}{71}$ . Et talia decem sunt  $16\frac{64}{71}$ . Quae si adiungantur triplo longitudinis diametri, fient simul  $376\frac{64}{71}$ . A quibus quadratum paulominus est 141433, quod longe maius est, quam 139968. Vides quantum profecerit Archimedes suis ἀπαγωγῆς εἰς τὸ ἀδύνατον, adeo ut si sententiam eius sequamur, duplum circuli ad semidiametrum applicatum faciet latitudinem supra triplum diametri maiorem, quam  $\frac{10}{71}$ .

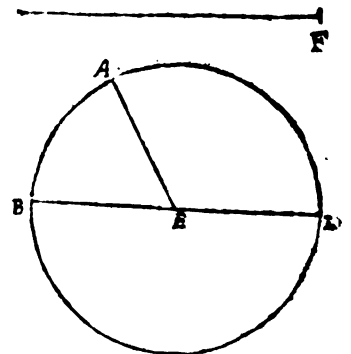
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5. Πρόβλημα.

Ἐν κύκλῳ πᾶς ὀμδὸς ἐστὶν ἴση φάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, κῆρος ἰσοσκελοῦς τῶν πλευρῶν τῆς ἐκ τῆς κέντρως ἰσῶς ἔχοντος.

PROPOSITIO VI. Theorema.

In circulo omne Scalprum est superficies, præter basim, conii isoscelis latus semidiametro circuli æquale habentis.

In circulo ABD, cuius centrum E, diametrus BED, datum sit Scalprum EADE. Aio Scalprum EADE esse superficiem, præter basim, Conii isoscelis, cuius conii latus fuerit æquale semidiametro EA. Esto recta F æqualis peripheria AD, per VII Cycloperimetrici. Recta autem GH esto decima pars quadrati a recta F. Erit igitur recta GH diametrus circuli, cuius circuli perimetrus fuerit æqualis peripheria AD, per III huius. Diuisa GH bifariam in I, fiat triangulum orthogonium IKG ita ut latus KG subtendens rectum angulum KIG sit æquale semidiametro EA. Sane manente IK immobili, triangulum IKG circumactum a puncto G, donec ad idem reuoluatur, faciet conum KGH, per XVIII definit. XI Elementi, cuius basis diametrus GIH est de-



Est decima pars quadrati a peripheria AD: latus autem KG semidiametro EA aequale: Et circulus basis GLHG aequalis peripheria AD. Quare vertice K posito in centro E, Et puncto G in A, recta quidem KG recta EA conueniet, ex constructione. Circulus vero GLHG reuolutus describet peripheriam AD, quandoquidem perimetris circuli GLH qui est basis conii KGH, est aequalis peripheria AD, ex constructione. Idcirco recta KG recta EA conueniens, a puncto A incipiens moueri, cum in rectam ED incidit, toto circumactu basis conica GLHG totam peripheriam Scalpri peragrauerit. Atque adeo recta EA, ED conuenientes simul, in unam rectam KG coalescent: ut uidelicet peripheria AD, in unam peripheriam GLHG. Quare Scalprum EADE superficiei KGH, prater basim GLHG, est aequale. Quod erat demonstrandum.

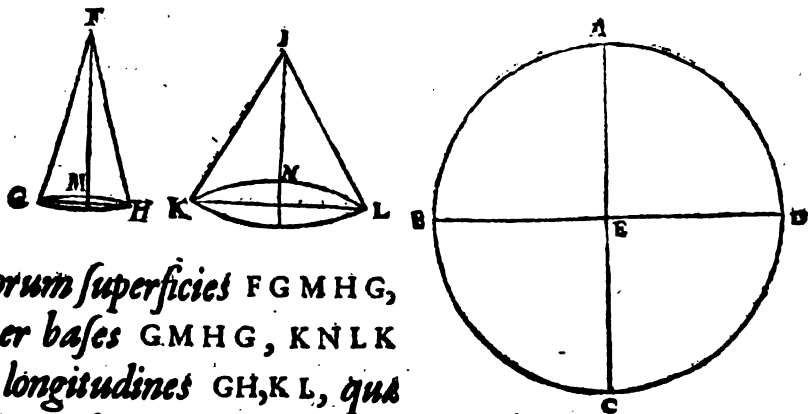
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ. Θεώρημα.

Αἱ τῶν κώνων ἰσοσκελῶν τῶν ἴσα κλίματα ἔχόντων Ἐπιφανείαι, χωρὶς τῆς βάσεως, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ τῶν βάσεων διαμέτροι.

PROPOSITIO VII. Theorema.

Superficies, prater basim, Conorum isosceleon æqualia latera habentium sunt inter se, ut basium diametri.

Conorum isosceleon FGH, IKL κλίματα, sine latera FG, IK, sunt æ-



qualia. Aio eorum superficies FGMHG, IKNLK, prater bases GMHG, KNLK inter se esse, ut longitudines GH, KL, quæ sunt diametri circulorum GMHG, GNLK basium in Conis propositis. Intervallo recta EA, quæ sit aequalis lateri Conorum FG, aut IK, describatur circulus ABCD, in quo diametri AC, BD secent

M sese

se se normaliter. Per antecedentem, superficies FGMHG Scalpro EADE: superficies autem IKNLK semicirculo BADEB esto equalis. Per eandem erit peripheria GMHG peripheria AD; peripheria autem KNLK peripheria BAD equalis. Aut contra, si

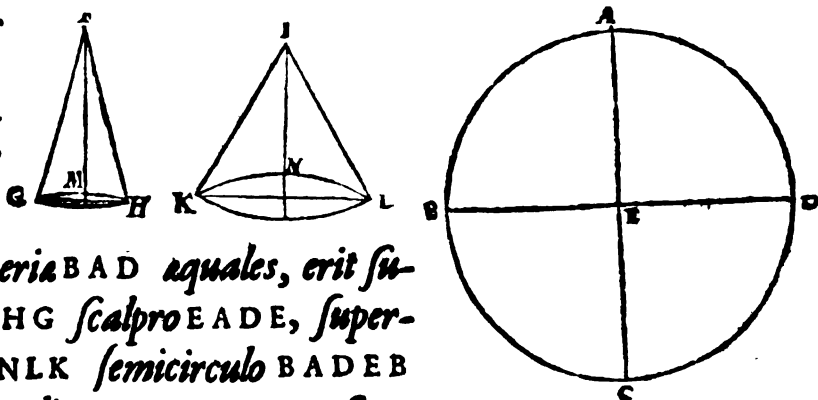
ponamus peripheriam GMHG peripheriam AD, & peripheriam

KNLK peripheriam BAD aequales, erit superficies FGMHG scalpro EADE, superficies vero IKNLK semicirculo BADEB equalis. Esto diameter AC exposita-

rum partium XII. Qualem 1440 erit quadratum a perimetro ABCDA, talium 360 erit quadratum a peripheria BAD, & talium 90 AD. Qualem igitur 360 perimetris circuli KNLK talium 90 erit GMHG. Et quadratum diametri GH talium 9 erit, qualem 36 tota KL. Atque ideo qualem XII expositarum partium erit longitudo AC, talium III erit longitudo GH, & talium VI longitudo KL. Dupla igitur est ratio longitudinis KL ad longitudinem GH. Sed & dupla est ratio semicirculi BADEB ad quartam circuli EADE. Erit itaque ut longitudo GH ad longitudinem KL, ita potentia BADEB ad potentiam EADE. Hoc est superficies FGMHG ad superficiem IKLNK. Quare  $\alpha\iota\ \tau\acute{o}\nu\ \chi\acute{\iota}\nu\omega\upsilon$ , &c. Quod erat demonstrandum.

## ALITER.

QVAE pars est peripheria Scalpri totius perimetri circuli, eadem pars est ipsum Scalprum ipsius circuli. Similiter quia in circulo Scalprum Scalpri aut pars est, aut partes, aut, si libet, incommensurable: omnino eadem pars, aut eadem partes, aut incommensurable Scalprum, erunt peripheria Scalpri peripheria alius Scalpri. Ut igitur peripheria Scalpri ad peripheriam Scalpri, ita Scalprum ad Scalprum. Sed ut peripheria ad



ria ad peripheriam, ita decima pars quadrati peripheria ad decimam partem quadrati peripheria, per XV quinti. Ergo per XI eiusdem, ut decima pars quadrati peripheria ad decimam partem quadrati peripheria, ita Scalprum ad Scalprum. Sed Scalpra sunt equalia superficiibus conicis: & decima partes peripheriarum basium sunt diametri ipsarum basium conicarum. Ergo ut diametrius basis conica ad diametrum basis conica, ita superficies conica ad superficiem conicam, excepta basi scilicet. Quod erat demonstrandum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Α.

Ἐκ δὴ τέτων φανερόν, ὅτι πᾶς μὲν κῶν & ἰσοσκελὴς τὴν μὲν Ἐπιφάνειαν, χωρὶς τῆς βάσεως, τῶν δοθέντων ἡμικυκλῶν ἴσῳ ἔχων, τὸ δὲ κλίμα τῆ ἐκ τῆς κέντρης, τὴν διάμετρον τῆς βάσεως τῶν κλίματι ἴσῳ ἔχῃ.

## COROLLARIUM I.

Patet omnem Conum isoscelea, qui superficiem, excepta basi, æqualem habuerit semicirculo dato, diametrum basis suæ lateri suo æqualem habere.

Demonstratum enim est, diametrum basis  $KL$  æqualem esse semidiametro  $ED$ . At latus  $LI$  eidem est æquale ex hypothesisi.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α Β.

Πάλιν ἐξ ἐδοθέντων κῶν & τὸ μὲν κλίμα τῆ ἡμιδιαμέτρω, τὴν δὲ Ἐπιφάνειαν τῶν ὅλων κύκλων ἴσῳ ἔχων.

## COROLLARIUM II.

Rursus non dabitur Conus, cuius latus semidiametro circuli, superficies autem toti circulo sit æqualis.

Nam data superficie æquali circulo, latere æquali semidiametro, necessario diametrius basis conica diametro circuli erit æqualis, per antecedentem. Quod est impossibile, per XXI undecimi, & per XV prioris ἀπὸ σφαιρῶν καὶ κυλίνδρων Archimedis.

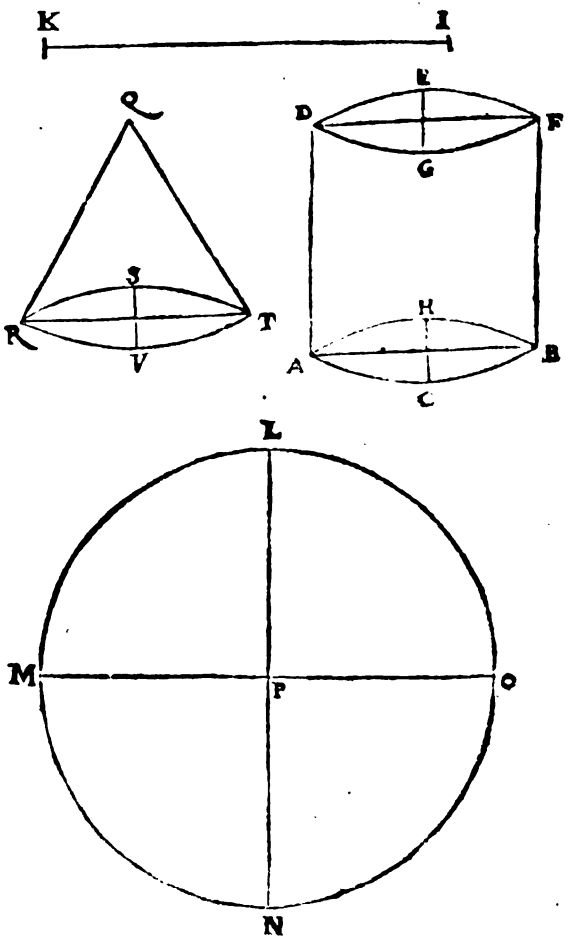
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η. Θεώρημα.

Εάν τὸ κλίνδρον ὀρθὸν ἕψθῃ τῇ τῆ βάσεως διαμέτρῳ ἴσον ἢ, ὁ κῶ-  
 νος ἰσοσκελὴς ὁ τὸ μὲν κλίμα τῆ τῆ κλίνδρον ἕψει, τὸ δὲ Ἐπιφάνειαν  
 τῆ ἡμίσει τῆ τῆ κλίνδρον Ἐπιφάνειας, χωρὶς τῶν βάσεων, ἴσῳ ἔχων  
 τὸν βᾶσι τῆ τῆ κλίνδρον βάσεως μείζων ἔξει.

PROPOSITIO VIII. Theorema.

Si cylindri recti altitudo & diameter basis eius  
 æquales fuerint, Conus isosceles, cuius latus est  
 æquale altitudini cylindricæ, superficies autem di-  
 midia superficiæ cylindricæ, excepta vtraque basi,  
 basim habebit basi cylindrica maiorem.

*Esto cylindrus rectus AF,*  
*cuius altitudo AD æqualis sit*  
*diametro AB circuli AHBC,*  
*qui est basis cylindri. Aio ba-*  
*sim cono, cuius latus sit æquale*  
*altitudini AD, superficies au-*  
*tem dimidio superficiæ cylin-*  
*dricæ, exceptis basibus AHBCA,*  
*DEFGD, esse maiorem alteru-*  
*tra basi cylindri, hoc est circulo*  
*AHBCA, aut DEFGD. Sit*  
*igitur quadratum a recta KI*  
*æquale superficiæ cylindricæ,*  
*exceptis basibus: nempe me-*  
*dia proportionalis inter dia-*  
*metrum AB, sive altitudinem*  
*AD, & peripheriam AHBCA:*  
*sitque ei congruens circulus*  
*LMNO, per IIII huius. Cuius*



diametri

diametri LN, MO sese  $\alpha\epsilon\theta\varsigma$   $\delta\epsilon\theta\alpha\varsigma$  secanto. Rursus coniq RT la-  
tus, siue  $\kappa\lambda\mu\alpha$  RQ, & diameter RT basis RSTVR, sunt equalia  
semidiametro PO. Ergo per VI huius, erit conica superficies  
QRSTVR equalis semicirculo MLOPM. ac propterea cylindrica  
superficies superficies conica dupla. Porro potentia circuli ad semi-  
diametrum applicata facit  $\pi\lambda\alpha\tau$  & rectam minorem semiperime-  
tro circuli, per XVIII huius. Ergo media proportionalis inter semi-  
diametrum, & semiperimetrum est maior potentia circuli. & me-  
dia inter totam diametrum & totam perimetrum maior quadruplo  
circuli. Erit igitur circulus LMNO maior quadruplo circuli AHBCA:  
& quadratum diametri LN maius quadruplo a diametro AB, per  
secundam XII. Ideo longitudo LN maior duplo longitudinis AB:  
hoc est, longitudo PO, vel RT, maior longitudine AB. Et per XXII  
sexti, quadratum PO, vel RT, maius quadrato AB. Et per II  
duodecimi, circulus RSTVR maior circulo AHBCA. Quod si ma-  
nente integra superficie RSTQ, latus QR minus fuerit, utpote  
aquale altitudini AD, necessario circulus basis conica maior erit cir-  
culo RSTVR. Est autem latus AD minus latere QR, ut ostensum  
est. Ergo si latus coniq fuerit aequale altitudini cylindri AD, multo  
maior erit circulus basis conica, quam circulus basis cylindrica. Quod  
erat demonstrandum.

## ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

Εκ δὴ τέτων φανερόν, ὅτι πλεονέκων κυλίνδρων  $\delta\epsilon\theta\alpha\varsigma$  ἢ  $\delta\pi\phi\alpha\lambda\epsilon\iota\alpha$ , χυαίς  
πάντων βάσεων, μείζων ἐστὶ κύκλος, ἢ ἢ ἐκ τῆς κέντρως μείζων λόγον ἔχει τῆς πλεο-  
νεῖς τῆς κυλίνδρων, ἢ τῆς διαμέτρως τῆς βάσεως τῆς κυλίνδρων.

## COROLLARIUM I.

Patet omnis cylindri recti superficiem, exceptis  
basibus, maiorem esse circulo, cuius semidiameter  
est media proportionalis lateris cylindri, & diame-  
tri basis cylindricæ.

Ἡαυτὴ ἐκτείνουσι τὴν προσηύθησιν XIII βιβλίου προσηύθησιν  $\alpha\epsilon\theta\varsigma$   $\kappa\alpha\iota$   
M 3 κυλίνδρων



κωνίδες Archimedis. Si igitur diameter basis cylindrica fuerit XVI partium expositarum, altitudo autem cylindri recti aequalis diametro: erit superficies cylindrica, exceptis basibus, maior, quam 809, qualium quadratum a diametro 256. ἢ ἐμβαδὸν αὐτὸν ἐστὶν minus quam 200. Ergo quadruplum ἔμβαδὸν minus, quam 800. ac propterea media proportionalis inter latus cylindri, ἢ diametrum basis, hoc ἐστὶν diameter ipsa, erit minor semidiametro circuli, cuius ἐμβαδὸν ἐστὶν maius, quam 809.

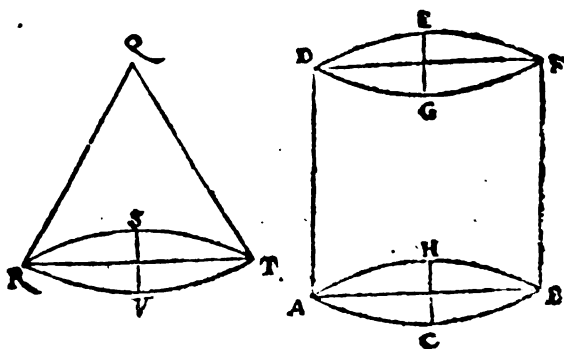
## ΠΟΡΙΣΜΑ Β.

Πάλιν ὅτι πηλὸς κώνη ἰσοσκελῆς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἢ Ἐπιφάνεια, μείζων ἐστὶ κύκλου, ἢ ἡ ἐκ τῆς κέντρης μέτρον λόγον ἔχει τῆς πλευρῆς ἢ κώνης, καὶ τῆς ἐκ τῆς κέντρης ἢ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις ἢ κώνης.

## COROLLARIUM II.

Rurfus patet, omnis conii isoscelis, excepta basi, superficiem maiorem esse circulo, cuius circuli semidiameter media est proportionalis inter latus conii & semidiametrum circuli basis conicæ.

Et hæc quoque contra XIII Archimedis ex eodem libro. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως ἐστὶν ὡς ἐπὶ τῆς ἀνωτέρου ΚορOLLΑΡΙΟΥ ἀποδείξεως, ὅτι τῆς κωνῆς QRT superficies ἐστὶν ἡμισυ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου AF.



## ΠΟΡΙΣΜΑ Γ.

Ἐπι ὅτι πηλὸς κώνη ἰσοσκελῆς ἢ Ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἔκ τῆς κέντρης μέτρον ἢ Ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου ἢ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἢ τῆς βάσεως ἢ κώνης ἰσῶν ἔχοντες.

## COROL-

COROLLARIUM III.

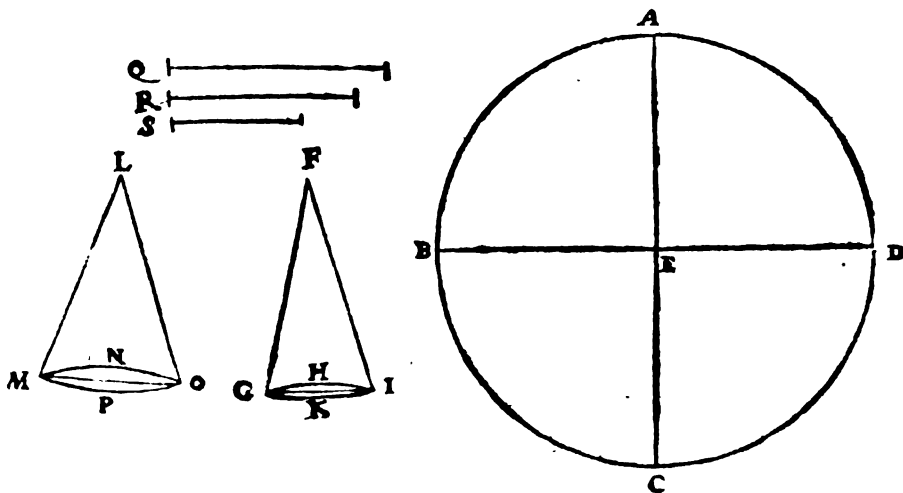
Constat etiam, omnis conii isoscelis superficiem, excepta basi, minorem esse dimidio superficiei cylindri, qui & latus & basim lateri & basi conii æqualem habeat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ. Πρόβλημα.

Κείν δοθέντος, τῆ Ἐπιφανείᾳ αὐτῆ ἴσῳ δυνάμει διρεῖν.

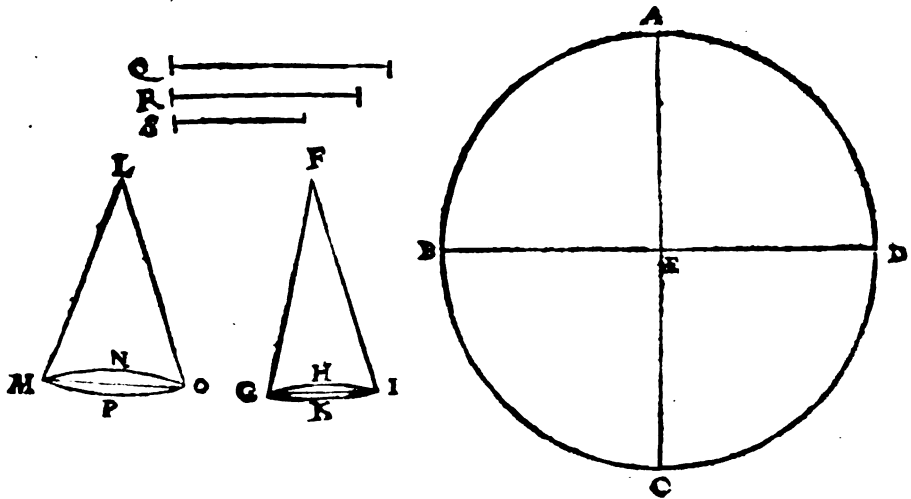
PROPOSITIO IX. Problema.

Cono dato, ipsius superficiei æqualem potentiam inuenire.



Sit datus Conus LMO, cuius basis circulus MNOPM. Sit inuenienda equalis potentia eius superficiei. Intervallo LM describatur circulus ABCD, cuius centrum E: diametri autem AC, BD sese normaliter secanto. Erit igitur recta EA equalis ipsi LM, ex constructione. Porro vertice L conii LMO manente immobilis in E, basis MNOPM circumacta describet scalprum in peripheria ABCD, ut in superioribus demonstratum est. Esto Coni FGI latus FG æquale lateri LM, hoc est recta EA: diameter autem GI, circuli basis conica GHIG equalis quarta parti diametri AC. Per ea, qua ante demonstrata sunt, erit conica superficies FGIK equalis quarta

quarta parti circuli ABCD: hoc est quadranti EADE: cui aequalis sit recta R, per III huius. Rursus rectarum GI, MO media proportionalis sit recta S. Fiat ut IG ad S, ita R ad quartam, qua sit



Q. Aio quartam magnitudinem Q, esse potentiam aequalem conicae superficiei datae LMNOPM. Nam per antecedentia, ut longitudo GI ad longitudinem MO, ita potentia GI ad potentiam S, per Coroll. XX sexti. Atqui ut potentia GI ad potentiam S, ita ex constructione potentia R ad potentiam Q. Ergo per XI quinti, ut longitudo GI ad longitudinem MO, ita potentia R, id est superficies conica FGHKIG, ad potentiam Q. Sed ut longitudo GI ad longitudinem MO, ita est superficies conica FGHKIG ad superficiem conicam LMNOPM. Ergo per eandem XI quinti, superficies conica FGHKIG eandem rationem habet ad superficiem LMNOPM, quam ad potentiam Q. Quare per IX eiusdem, superficies conica data LMNOPM, & potentia Q, sunt aequales. Quod erat faciendum.

ALITER.

Fiat ut dimidia MO ad LO, ita circulus MNOPM ad quartam. qua quarta erit potentia superficiei LMNOPM per XV prioris de sphaera & cylindro Archimedis.

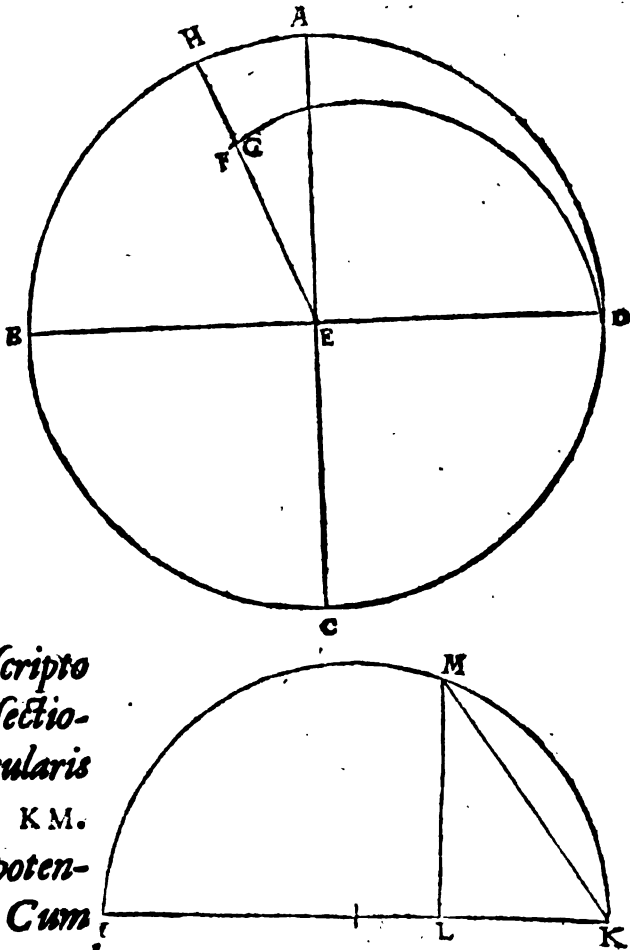
ΠΡΟ.

Τὸν τμήμα δοθέντα τετραγωνίζεν ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ.

PROPOSITIO X. Problema.

Scalpro dato æquale quadratum inuenire in dato circulo.

In circulo ABCD sit inuenienda potētia Scalpri HED insistentis peripheria HAD. Diametris AC, BD, sese normaliter secantibus, describatur finis voluta ordinata DGF. Deinde inuentum sit ἐμῆσθὸν circuli propositi ABCD, per III huius. sitque illud recta IK: qua per X sexti, in rationem EH ad GH in puncto L secta, & super eadem descripto semicirculo IMK, e signo sectionis L, erigatur perpendicularis LM: & connectatur recta KM. Aio connexam KM esse potentiam Scalpri dati HED. Cum enim sit ut ED, hoc est, EH, ad GH, ita, ut toties a nobis ex natura voluta ostensum est, tota peripheria DCBHAD, ad peripheriam HAD: sit autem ut peripheria DCBHAD ad peripheriam HAD, ita circulus datus ad scalprū datum H-D, (quod quæ pars est peripheria, eadem sit Scalprum sui circuli) erit per XI quinti, ut EH ad GH, id est, ut IK ad LK, ita circulus, hoc est quadratum IK, ad Scalprum. Sed ut est IK ad LK, ita quadra-



N tum

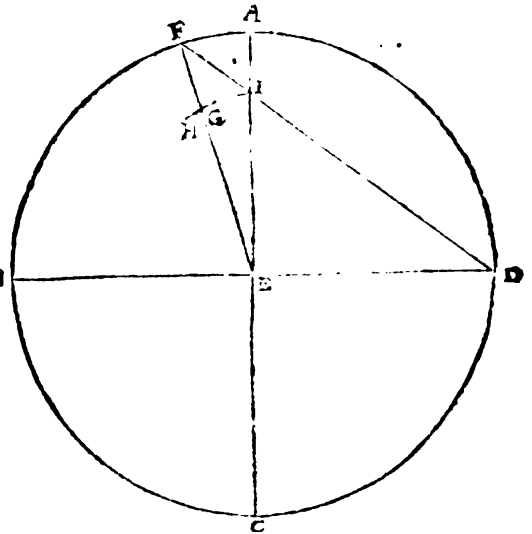
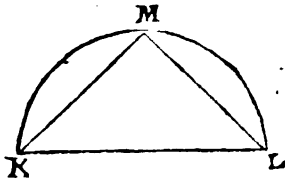
tum  $IK$  ad quadratum  $KM$ . Ergo quadratum  $IK$  ad Scalprum, & ad quadratum  $KM$ , eandem habet rationem. Quare per posteriorem partem IX quinti, quadratum  $KM$ , & Scalprum  $HED$  sunt aequalia. Est igitur  $KM$  potentia Scalpri dati. Quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ. Πρόβλημα.

Τμήμα κύκλι δοθέν τετραγωνίζεσθαι.

PROPOSITIO XI. Problema.

Dato segmento circuli æquale quadratum reperire.



Ut in superiore propositione, ita in hac, si Polygona circulo  $ABC$  inscripta fuerint isopleura, nullus est labor tam ibi Scalpra, quam hic segmenta quadrare. Hoc enim perinde est, ac partem imperatam de potentia data detrabere, hoc est de circulo, cuius  $\epsilon\mu\beta\alpha\delta\omicron\nu$  notum est, per XVI huius. Sin autem latera Polygonorum fuerint inæqualia, tunc in Scalpris quomodo agendum sit, superius ostensum est. Nunc in circulo  $ABCD$  datum sit inæquale segmentum  $FADIF$ , cui æquale quadratum sit inveniendum. Ab  $F$  limite segmenti dati iungatur recta  $FE$ . Diametris autem  $AC, BD$  sese normaliter secantibus, describatur apotome voluta ordinata  $IGH$  secans rectam  $FE$  in  $G$ . Scalpri vero  $FED$  quadratum sit recta  $KL$ , reperta per antecedentem. super qua semicirculo  $KML$ , descripto, per  $L$  quarti, accommodetur recta  $LM$  potentia scilicet trianguli  $FDE$ . Ac denique connectatur  $KM$ . Aio  $KM$  esse

KM esse potentiam segmenti FAD. Nam cum per XLVII primi Elementi, quadratum KL possit quadrata LM, KM; ablato quadrato ML, nempe potentia trianguli DEF, a quadrato KL, id est a potentia Scalpri FED: per communem sententiam, remanebunt KM, & segmentum FAD equalia. Ergo KL est quadratum segmenti dati FAD. Quod erat faciendum.

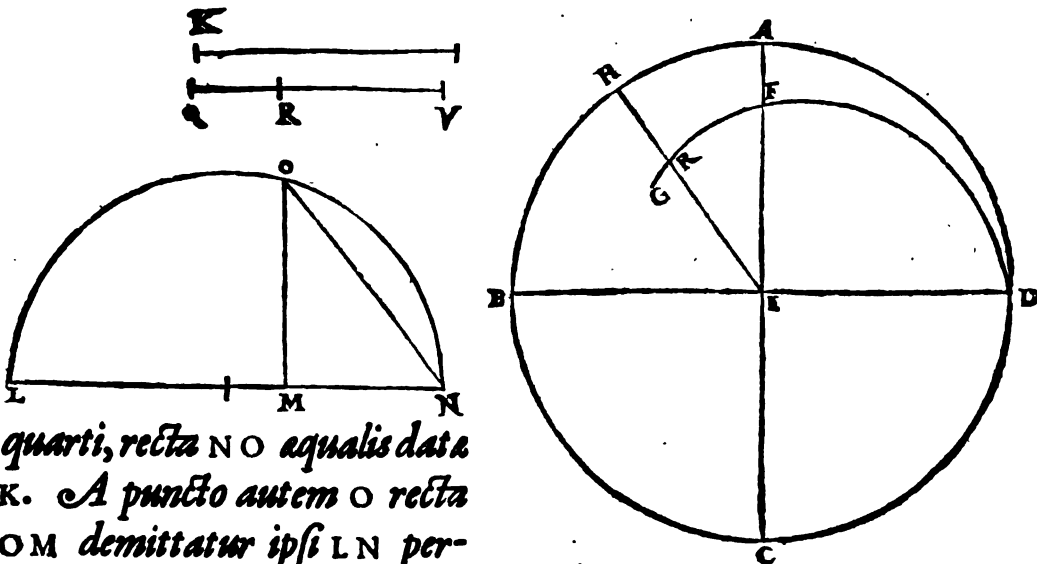
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ. Περίληψη.

Τῆ δοθείσῃ δυνάμει ἴσον Τμήμα δεῖσθαι ἐν τῷ δοθέντι κύκλῳ.

PROPOSITIO XII. Problema.

Data potentia æquale Scalprum reperire in dato circulo.

Data potentia K sit inueniendum conueniens Scalprum in circulo ABCD. Inuenta per III huius potentia circuli, nempe LN, & descripto super ea semicirculo LON, accommodetur ei, per primam

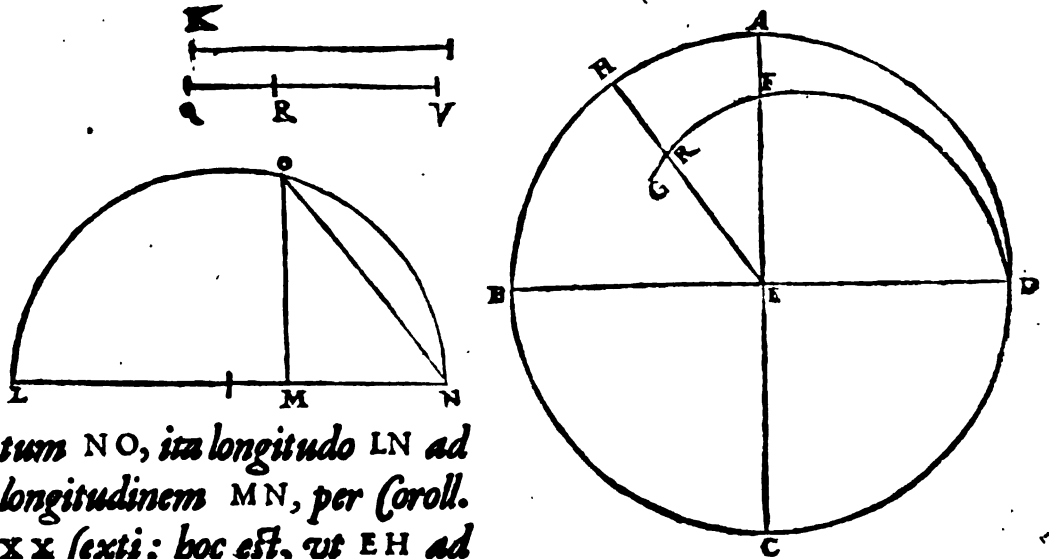


quarti, recta NO aequalis data K. A puncto autem O recta OM demittatur ipsi LN perpendicularis, per XII primi. In circulo ABCD, diametris sese normaliter secantibus AC, BD, describatur finis voluta ordinata DFG. Deinde recta QV semidiametro ED aequalis secetur in rationem LN, MN, in puncto R. Postremo centro E, intervallo ER, describendus circulus secet portionem voluta in R. Connectatur recta ER,

N 2

& pro-

Et producta secet peripheriam HAD, in puncto H. Aio Scalprum HED esse aequale potentia data K, hoc est potentia NO, ex constructione. Nam cum sit ut quadratum LN ad quadra-



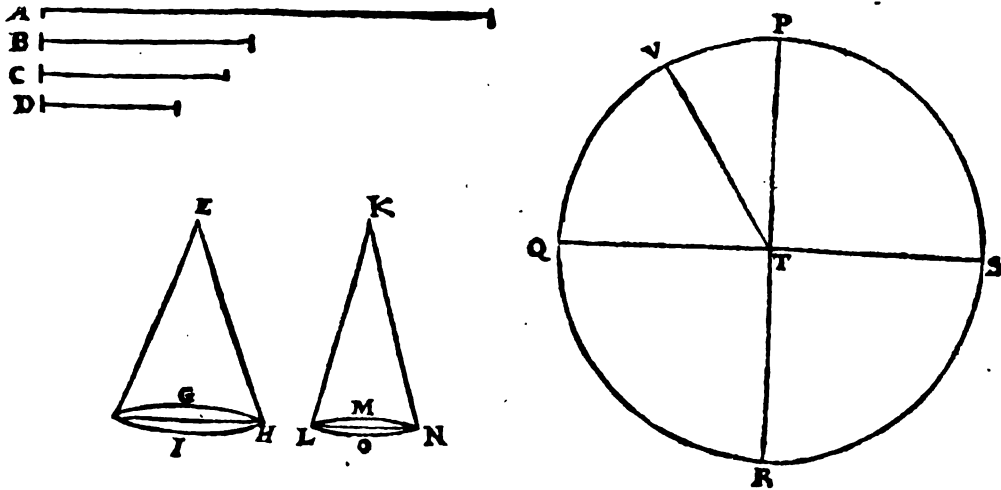
tum NO, ita longitudo LN ad longitudinem MN, per Coroll. XX sexti: hoc est, ut EH ad

ER, Et proinde ut peripheria tota DCBHAD ad peripheriam HAD: Et alternando, ut RH ad EH, ita peripheria HAD ad peripheriam DCBHAD. ut autem peripheria ad peripheriam, ita scalprum ad totum circulum: per XI quinti erit, ut quadratum NO ad quadratum LN, hoc est, ad circulum, sic scalprum ad eundem circulum. Ergo NO Et Scalprum eandem rationem habent ad circulum. Et proinde per posteriorem partem IX quinti, NO, hoc est K, Et Scalprum sunt aequalia. Quod erat faciendum.

ALITER.

Data potentia B sit inveniendum Scalprum aequale in dato circulo PQRS. Esto Conus KLMNOL, cuius superficies sit aequalis quadranti circuli TPST: Et latus eius KL aequale semidiametro TP, per ea, qua antea demonstrata sunt. Esto C aequalis quadranti TPST, per X huius. Ergo erit aequalis conica superficies KLMNOL, ut antea demonstratum est in aliis. Fiat ut C ad B, ita LN ad aliam, nempe ad D. Postremo duabus LN, D, inueniatur tertia proportionalis FH. Erit, per Coroll. XX sexti, ut potentia LN ad poten-

potentiam D, ita longitudo LN ad longitudinem FH. Sed ut potentia LN ad potentiam D, ita erat ex constructione, potentia C ad potentiam B. Ergo per XI quinti, erit ut LN diameter circuli

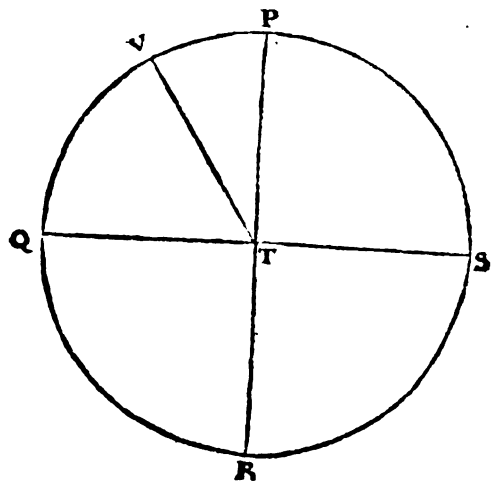
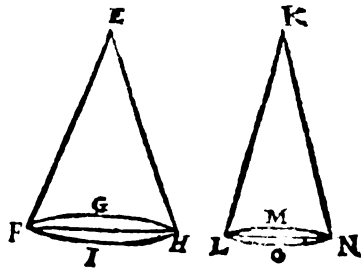
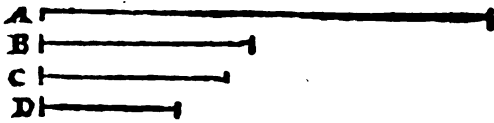


LMNOL, qui est basis conii KLN, ad FH diametrum circuli alicuius, qui circulus sit basis alicuius conii, ita superficies KLMNOL ad superficiem eiusdem conii ignoti, per VII huius. Fiat igitur conus EFH, cuius latus EF sit aequale lateri KL, hoc est semidiametro TP. Ut igitur longitudo LN ad longitudinem FH, ita superficies KLMNOL ad superficiem EFGHIF. Et quia erat ut LN ad longitudinem FH, ita superficies conica KLMNOL ad B: Ergo per IX quinti, ipsa B & superficies conica EFGHIF sunt aequales. Esto A decuplum potentia FH. Per VII aut IX cycloperimetrici, erit A peripheria circuli EFGHIF aequalis: cui aequalis sit peripheria VPS in circulo PQRS, per eandem IX. Connectatur recta TV. Aio Scalprum TVPS esse aequale potentia data B. Nam ut quadratum LN ad quadratum FH, ita quadratum perimetri LMNOL ad quadratum perimetri EFGHIF (quod utraque peripheria sit potentia decupla potentia diametri sui) id est, ita quadratum peripheria PS ad quadratum peripheria VPS. (quod LMNOL ipsi PS, EFGHIF autem ipsi VPS sit aequalis) Erit ergo per XXII sexti, ut longitudo LN ad longitudinem FH, ita longitudo PS, ad longitudinem VPS. Sed ut longitudo VPS ad longitudinem PS, ita

N<sub>3</sub> scalprum



scalprum TVPS ad scalprum TPS (quod scalpra totius circuli eadem partes sunt, qua peripheria scalprorum, totius perimetri, ut



iam diximus) Ergo ut longitudo LN ad longitudinem FH, ita scalprum TVPS ad scalprum TPS. Sed ut longitudo LN ad longitudinem FH, ita conica superficies KLMNOL, hoc est quadrans, sine scalprum TPS, ad conicam superficiem EFGHIF, hoc est, ad B. Ergo B, & Scalprum TVPS, eandem rationem habentes ad eandem magnitudinem, sunt aequales, per IX quinti. Scalprum igitur TVPS in circulo PQRS repertum est aequale datae potentiae B. Quod erat faciendum.

Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

At data recta A, dices rationem, quam habet ad peripheriam PQRS praeter ea, quae alibi demonstrata sunt, si super decima quadrati A, nempe super FH, constituatur conus habens latus HE aequale semidiametro TS. Erit enim ut diameter FH ad diametrum PR, ita perimetris FIGH, hoc est, data recta A, ad peripheriam PQRS, per II duodecimi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ. Πρόβλημα.

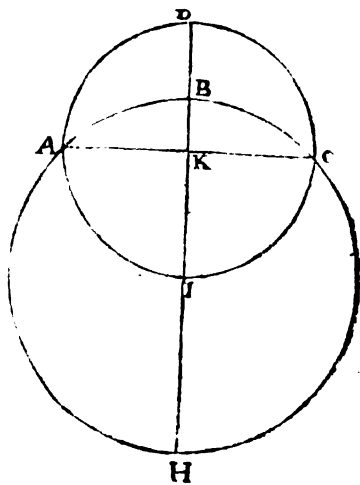
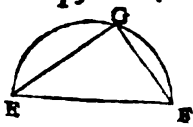
Τὸν ἀρθέντα μῆσιον τετραγωνίζειν.

PROPOSITIO XIII. Problema.

Datae lunulae aequale quadratum reperire.

Circulus

Circulus DAIC, cuius Diametrus DI, centrum K, circulum ABCH, cuius diametrus BH, centrum I, secet in punctis AC, faciens univisionem ADCB. Subemur ipsum univisionem quadrare. Juncta AC, per x huius, inueniatur potentia segmenti ADC. Sitque ea recta EF: super qua descri-



pto semicirculo EGF, accommodetur ei recta FG aequalis potentia segmenti ABC quasita per eandem x huius. Iungatur recta GE: quam aio aequalem esse univisioni ADCB. Nam segmentum ADCA excedit lunulam ADCB, segmento ABCA. Quadratum autem EF aequale segmento ADCA excedit quadratum EG quadrato GF, per XLVII primi. At quadratum GF est aequale quadrato segmenti ABCA, ex constructione. Ergo quadratum GF, vel ei aequale segmentum, ABCA, est excessus tam quadrati GE, quam Lunula ADCBA in equalibus magnitudinibus EF, & segmento ADCA. Ac proinde quadratum GE, & quadratum Lunulae eandem rationem habent ad eandem magnitudinem GE. Quare equalia sunt, quadratum GE, & Lunula ADCBA per IX quinti. Quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Idem potes facere in omni univisionem dato, coniuncta prius hypotenufa. Tunc enim duo erunt segmenta inæqualia, quorum potentias per x huius venaberis. Tum minore de maiore deducta, reliquus erit univisionem, siue, vt Plautus loquitur, Lunula. Nam in figura a nobis proposita segmentum ADCA est semicirculus circuli DAIC: cuius duplus est circulus ABCH. Itaque ABC erit segmentum quadrati circulo maiori ABCH inscripti, cuius quadrati latus est AC. Lunula vero ADCBA, est ea, quam quadravit Hippocrates Chius, cuius lunulae potentia est æqualis rectæ KI, aut KD, semidiametro scilicet circuli DAIC. Nam iunctis IA, IC, erit scalprum IABC quarta pars circuli BAHC, æquale semicirculo ADCA. Ablato communi ABCA, remanebit Lunula ADCBA æqualis triangulo AIC, cuius potentia est perpendicularis IK, per XIII sexti, adiuuante xxxi tertij. Itaque recta EG erit ei æqualis. Hoc inuento multum gloriabatur Hippocrates, & putauit illo epichiremate sese viam muniuisse ad quadrationem circuli. Sed neque alias lunulas quadrare potuit, neque illa lunula quicquam adiumenti ad τετραγωνισμὸν κύκλου adferre potuit.

ΠΡΟ-

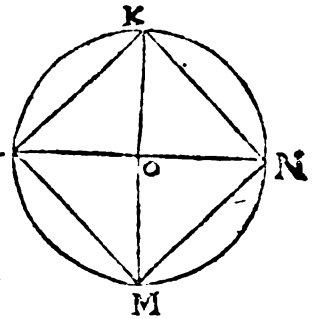
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ. Θιώημα.

Ἡ Ἀμφάνεια ἔξ ὀκταέδρου ἔξ εἰς Σφαῖραν ἐγγραφέντῳ πρὸς τὸ μέγιστον ἢ αὐτὸ περιγραφέντος Σφαίρας κύκλόν ἐστιν, ὡσπερ εἴκοσι πρὸς ἑνία.

PROPOSITIO XIII. Theorema.

Superficies Octaedri sphaerae inscripti ad maximum sphaerae circumscriptis circulum sese habet, vt viginti ad nouem.

In sphaera, cuius maximus circulus  $KL MN$ , diametrus  $KM$ , centrum  $O$ , esto descriptum octaedrum, cuius latus  $KN$ , nempe quadrati circulo eidem inscripti. Si interuallo  $KN$  describatur circulus, erit diametri totius quadratum duplum quadrati  $KM$ , cum sit quadruplum quadrati  $KN$ , quod est dimidium quadrati  $KM$ . Ergo per primam XII, triangulum Hexagoni circulo  $KL MN$  inscripti duplum. Sed in Octaedro sunt octo triangula Hexagoni, ἔξ προinde quadraginta segmenta Hexagoni, per secundam huius. Quae dupla sunt segmentorum totidem Hexagoni circulo  $KL MN$  inscripti. Erit igitur superficies Octaedri talium octaginta segmentorum, qualium triginta sex circulus  $KL MN$ . Quae cum rationem habeant, quam viginti ad nouem, ideo superficies Octaedri sphaerae inscripti ad circulum maximum sphaerae circumscriptis, aut aequalem basi vnius ex duabus Pyramidibus quadrilateris, in quas Octaedrum resoluitur; eam habet rationem, quam viginti ad nouem. Quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ. Θιώημα.

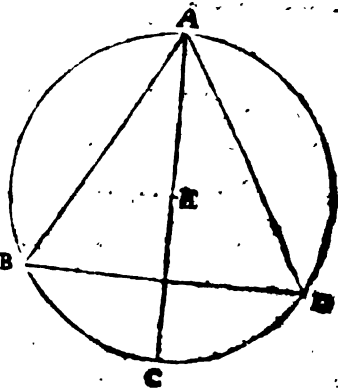
Ἡ Ἀμφάνεια ἔξ τετραέδρου ἔξ εἰς Σφαῖραν ἐγγραφέντῳ πρὸς τὸ μέγιστον ἢ περιγραφέντος αὐτὸ Σφαίρας κύκλόν ἐστιν, ὡσπερ ἡ περιφέρεια τμήματῳ

τμήματ' τετράων ἰσοπλευρῶν ἔς τὴν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφέντ'  
 πρὸς τὴν ὑπολείπονται αὐτῶν.

PROPOSITIO XV. Theorema.

Superficies Tetraedri Sphaerae inscripti ad maximum Sphaerae circumscribentis circulum perinde est, ut peripheria segmenti trigoni isopleuri eidem circulo inscripti, ad rectam, quae ipsam subtendit.

Sit circulus ABCD maximus eorum, qui in sphaera: sitque in eo inscriptum triangulum isopleuron A B D. Aio Pyramidis sphaera inscripta superficiem ad circulum ABCD rationem habere, quam habet peripheria BCD ad subtendentem BD. Sit diameter AC expositarum partium XII. Erit quadratum 144 talium, qualium 108 latus BD.



Rursus qualium 144 quadratum AC, talium 1440 tota perimetris ABCD. ideoque triens eiusdem perimetri, nempe BCD, talium 160 erit. Porro latus Pyramidis talium est diuum, qualium trium quadratum AC, per XIII, ἔς XVIII tertidecimi. Et propterea qualium 36 erit semidiameter EA, talium 96 erit latus Tetraedri. quae quidem habent rationem inter se, ut 3 ad 8. Sed in Pyramide sunt quatuor trigona isopleura, ἔς proinde viginti segmenta hexagoni: in circulo autem ABCD sunt triginta sex: quorum singula ad singula Pyramidis rationem habent, quam 3 ad 8. Id est, circulus habet ter triginta sex segmenta, qualia octies viginti sunt in Tetraedro, per XVIII septimi Elementi. Segmenta igitur circuli ad segmenta Pyramidis sunt, ut 108 ad 160, hoc est, ut subtendens BD ad peripheriam BCD. Quod erat demonstrandum.

○

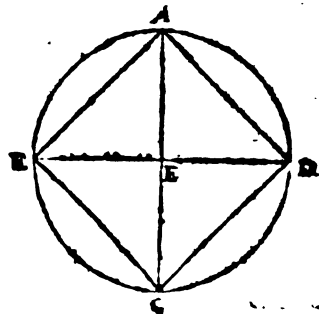
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι5. Θεώρημα.

Τὸ ἑνδεκατημόριον ἔκ κύκλου μείζον ἐστὶ ἔκ τμήματι τετραγώνου ἔκ  
εἰς αὐτὸν ἐγγραφόμενης.

PROPOSITIO XVI. Theorema.

Vndecima pars circuli maior est segmento Qua-  
drati ipso circulo inscribendi.

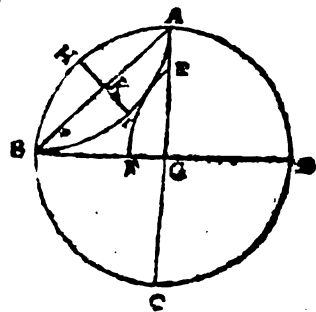
In circulo  $ABCD$ , cuius diametri  $AC, BD$   
se se normaliter secent, inscriptum esto Qua-  
dratum. Aio segmentum  $ABA$  esse minus  
vndecima parte ipsius circuli. Esto longitudo  
diametri  $AB$  expositarum partium  $XVI$ . Po-  
tentia igitur  $ABCD$  erit talium  $128$ , qualium  
 $256$  quadratum à diametro  $C$ . Per Scholion



III huius, τὸ ἑμβάδον κύκλου  $ABCD$ , maius est, quam  $199$ ; minus,  
quam  $200$ . Deductis igitur  $128$  a minus quam  $200$ , ἔσθ' plus quam  
 $199$ , relinquentur minus quam  $72$ , potentia scilicet quatuor segmen-  
torum  $AB, BC, CD, DA$ . Itaque segmentum  $AB$  minus erit, quam  
 $18$ . Sed vndecima pars circuli, nempe numeri maioris, quam  $199$ , est  
maior, quam  $18$ . Ergo  $18$  sunt minora, quam vndecima pars cir-  
culi. atque adeo vndecima pars circuli maior segmento quadrati  
ipso circulo inscripti. Quod oportebat demonstrare.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Quia segmenta vndecim quadrati circulo inscripti  
minora sunt ipso circulo, propterea semifragmenta viginti  
duo erunt eodem minora, per  $XV$  quinti: & proinde  
quadrans circuli erit maius quinque semifragmentis cum  
semisse, hoc est vndecim quartis vnius segmenti. Quare  
in quadrante:  $AHBE$  circuli  $ADCB$ , in quo sunt descri-  
pta quinque semifragmenta,  $AHK, AIK, BHK, BIK, FGF$ .  
spatium subsiciuum  $AIBFE$  inter segmentum  $AIP$  &  
segmentum  $FGE$ . est maius quarta segmenti.



ΠΡΟ-

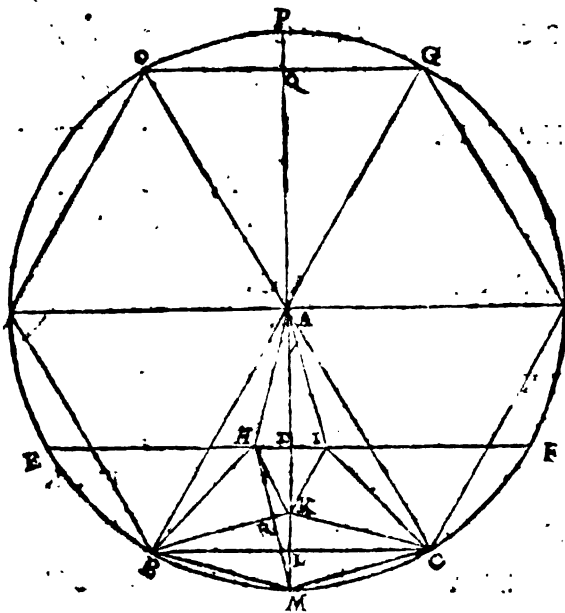
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ. Θεώρημα.

Τὸ ἑξάγωνον τρίγωνον διαίρεται εἰς ἕξ τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἑξάγωνον τμήματι ἑξασφύδρα, καὶ εἰς ἓν τρίγωνον ἰσοπλευρον τοῖς λοιποῖς ἀσύμμετρον.

PROPOSITIO XVII. Theorema.

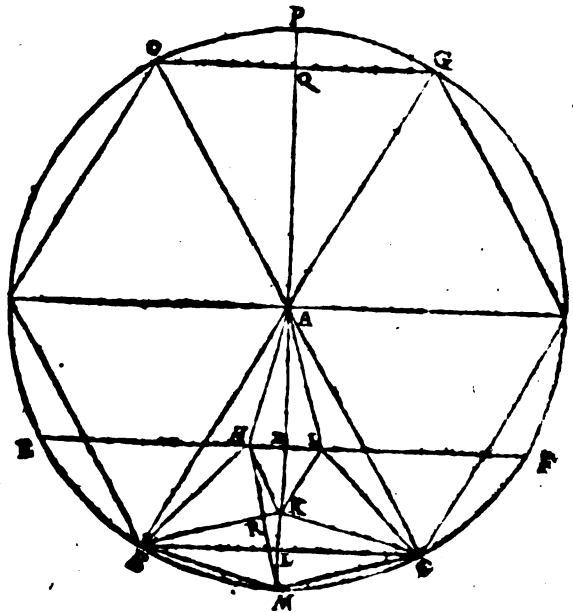
Triangulum Hexagoni diuiditur in sex triangula isoscelea, segmento Hexagoni inscribenda, & præterea in unum triangulum isopleuron reliquis incommensurable.

In circulo GEMF, cuius diameter PM, centrum A, descriptum est Hexagonum, & triangulum isosceles in segmento BMCB trianguli ABC. Aio quodlibet triangulum Hexagoni, puta ABC (quod quidem est isopleuron per XV quarti) diuidi in triangula sex isoscelea aequalia triangulo isosceles BMC, in segmentum BMCB inscribendo, & præterea in triangulum isopleuron, quod sit reliquis sex incommensurable. Diuisa peripheria BC bisariam in M, & abscissis peripheriis MBE, MCF aequalibus peripheria BMC, agatur recta EF per ipsas sectiones E, F. Est autem peripheria BMC segmentum Hexagoni. Ergo & peripheria MBE, MCF sunt segmenta Hexagoni. ac propterea recta EF diuidet semidiametrum AM bisariam in D, per XII tertiidecimi. Connectantur recta MB, MC. Ergo triangulum isosceles BMC diuiditur bisariam a recta LM, per IIII Cycloperimetricki: qua est apotome, ut non semel ostendimus, per LXXIII decimi: cui abscin-



O 2 datur

datur equalis recta  $LK$ : qua cum sit commensurabilis apotoma  $LM$ ,  
 & ipsa quoque erit apotome, per CIIII decimi. In triangulo  $AGO$ ,  
 recta  $PQ$  & ipsa est apotome, utpote equalis ipsi  $LM$ . Sed tam  
 $AQ$  ipsi  $AP$ , quam  $AM$  ipsi  $AL$ , potentia duntaxat est commensura-  
 bilis, ut alibi ostendimus. Ergo tota  $QL$  toti diametro  $PM$  poten-  
 tia tantum est commensurabilis.  $KP$  autem est equalis ipsi  $QL$ . Ergo  
 $KP$  est diametro commensurabilis potentia, & detracta ex diame-  
 tra relinquit apotomen  $KM$ ,  
 per eandem LXXIIII deci-  
 mi. Connectantur recta  $KC$ ,  
 $KB$ . Erit igitur triangulum  
 $KBC$  triangulo  $BMC$  aequale.  
 cui fiant similia & equalia  
 $AHB, AIC$ , per XXIII primi.  
 Ab equalibus angulis  $A, B, C$   
 auferantur equalis  $HAB, HBA$ ,  
 $KBC, KCB, ICA, IAC$ . Re-  
 manebunt anguli  $HAI, HBK$ ,  
 $ICK$  equalis. Qui cum con-  
 tineantur rectis equalibus,



per IIII primi, erunt bases  $KH, HI, IK$  equalis. & proinde triangulum  
 $KHI$ , isopleuron. Connectatur recta  $HM$ . Cum latera  $DH, DA$  trian-  
 guli  $DHA$  sint equalia lateribus  $DH, DM$  trianguli  $DHM$ , & anguli  
 contenti equalis, utpote recti: basis ergo  $HM$  basi  $HA$  erit equalis. Sed  
 recta  $HA, HB, BM$  sunt equalis ex constructione. Ergo per primum  
 pronunciatum, eadem eidem  $HM$  erunt equalis. ac propterea trigo-  
 num  $HBM$  itidem erit isopleuron. In triangulo isoscele  $ABM$ , anguli  
 $ABM, AMB$  sunt equalis, per V primi. item anguli  $BKM, BMK$  in  
 triangulo isoscele  $BKM$ . Ergo angulus  $BKM$  angulo  $ABM$  est equalis,  
 per Scholion XII Cycloperimetrici. ac propterea triangula isoscelea  
 $ABM, BKM$ , unum angulum communem habentia  $BMA$  sunt  
 equangula, per XXXII primi, adiuvante V primi. Ideo angulus  
 $BAM$  angulo  $KBM$  equalis. Sed angulus  $BAM$  est dimidium anguli

$BAC$

$BAC$ , hoc est angulus  $HBM$ . Ergo angulus  $KBM$  est dimidium anguli  $BAC$ , hoc est angulus  $HBM$ , per VII pronuntiatur. Et proinde angulus  $KBM$  est dimidium anguli  $HBM$ . Propterea recta  $KB$  diuidens basim  $HM$  trianguli isopleuri  $HBM$  bisariam, in puncto  $R$ , est homologa recta  $AM$  diuidenti basim  $BC$  trianguli isopleuri  $ABC$  bisariam homologam basi  $HM$ . Triangulum equilaterum  $ABC$  triangulo equilatero  $HBM$  est analogum, per I definit VI. sunt enim similia. Et per XV quinti, triangulum  $BKM$  triangulo  $ABL$  erit analogum. Et ideo anguli  $BRM$ ,  $BRH$  angulis  $BLA$ ,  $CLA$  aequales, ergo & recti. & bases igitur  $KM$ ,  $KH$  aequales, per IIII primi. Triangula ergo  $BHK$ ,  $BKM$  sunt equalia, per eandem IIII primi. Sed triangulum  $BKM$  est aequale triangulo  $BKC$ , aut  $BMC$ , aut  $AHB$ , aut  $AIC$ . Ergo triangulum  $BHK$  ipsis omnibus erit aequale. Neque aliter demonstrabitur de triangulis  $ICK$ ,  $AHI$ : quod bases  $HI$ ,  $IK$  basi  $HK$ , & latera quoque ex constructione habeant equalia. Ergo triangulum Hexagoni  $ABC$  diuisum est in sex triangula triangulo  $BMC$  equalia, nempe in  $AHB$ ,  $BKC$ ,  $AIC$ ,  $AHI$ ,  $BHK$ ,  $CIK$ : & in unicum isopleuron  $HKI$ . quod aio reliquis sex esse incommensurabile. Nam altitudo  $DA$  trianguli  $HAI$  est equalis semidiametri dimidio  $DM$ , ut in principio ostensum est: &  $HI$  ostensa est equalis ipsi  $KM$ . & propterea  $IH$ , vel  $HK$ , est apotome, & irrationalis, & ideo ipsi semidiametro  $DM$  aut  $AM$  incommensurabilis, per VII definit. decimi Elementi. Ergo per XV quinti,  $DA$  ipsi  $HK$  est incommensurabilis. Rursum quia triangulum  $IHK$  est equilaterum, qualium quatuor est quadratum lateris  $HK$ , talium trium est potentia perpendicularis  $KD$ . Commensurabilia igitur sunt  $HK$ ,  $DK$ , saltem potentia. Nam quadratum recta  $HK$ , plus potest, quam quadratum recta  $KD$  congruentis, quadrato recta  $DH$  longitudine ipsi  $HK$  commensurabilis. Quare per III definit. tertia Hexados, recta  $HK$  est apotome, que dicitur tertia: & ideo illi potentia commensurabilis recta  $KD$  est ἀλογον, per definit. VII decimi. Erit igitur ipsi  $DA$  incommensurabilis, per eandem definitionem. Quare cum triangula  $ADI$ ,  $KDI$  sub eadem altitudine  $DI$  constituta, sint



inter se, ut bases  $DA, DK$ , qua sunt ostensa incommensurabiles, ostendit ipsa triangula incommensurabilia, per primam sexti. Et per xv quinti totum triangulum  $AIH$ . toti triangulo  $IHK$  incommensurabile. Quod erat demonstrandum.

## Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Εκ δὴ τῶν φανερῶν, ὅτι ὁ κύκλος διώα) τετάρτοις ἐξ τετάρτων ἰσοκέλευς πρὸς τμήματα) εξαγώνου ἑξαγώνου, ἔστι τμήματα) δωδεκαγώνου ἑβδομάτου δύο. Καὶ ὅτι τὸ τετάρτον ἰσοκέλευς τὸ πρὸς τμήματα) εξαγώνου ἑξαγώνου σὺν τῷ ἰσοκέλευς ἀσυμμέτρῳ διώα) δέκα τμήματα) δωδεκαγώνου.

## COROLLARIUM.

Patet, quod circulus possit triginta sex triangula isoscelea segmento hexagoni inscribenda, cum septuaginta duobus segmentis dodecagoni. Item quod triangulum isosceles segmento Hexagoni inscribendum simul cum vno isopleuro incommensurabili potest decem segmenta dodecagoni.

In circulo sunt segmenta Hexagoni xxxvi, per ii huius. at in segmento sunt singula triangula, et bina segmenta dodecagoni. Ergo in circulo sunt triginta sex triangula segmento Hexagoni inscribenda: et praterea lxxii segmenta Dodecagoni. Quod est prius.

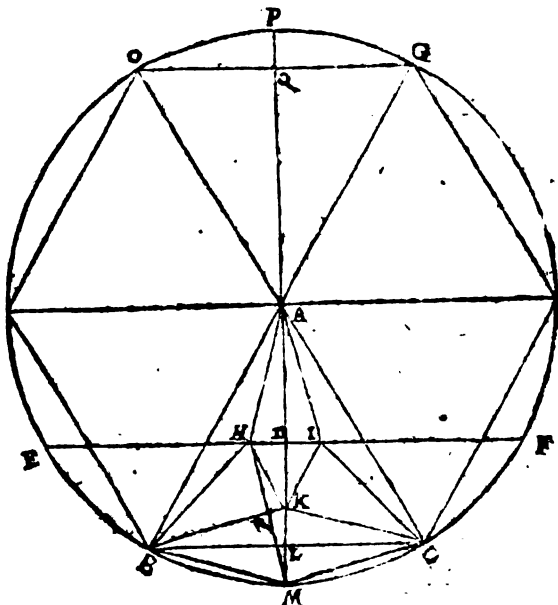
Rursus in circulo sunt triangula isoscelea segmento Hexagoni inscribenda xlii, et sex praterea triangula isopleura, et duodecim segmenta dodecagoni. Ablatis duodecim segmentis, reliqua xlii triangula isoscelea, et vi isopleura, sunt equalia xxxvi isoscelibus et lx segmentis dodecagoni. Et proinde unum isosceles et unum isopleuron sunt equalia decem segmentis Dodecagoni. Quod etiam ita demonstrari potest. Triangulum Hexagoni potest quinque  
segmenta

segmenta Hexagoni, per eandem II huius. Poterit igitur quinque isosceles cum isopleuro. Ergo unum isosceles, & unum isopleuron sunt equalia decem segmentis dodecagoni. Quod erat posterius.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Quod triangulum  $ΗΒΜ$  sit æquilaterum, poterat etiam alia via demonstrari. Nam trianguli æquilateri  $ΑΒC$  angulus  $Α$  est duum trientium unius recti. Ergo angulus  $ΒΑΜ$  trianguli isoscelis  $ΜΒΑ$  est unius trientis. Reliqui igitur ad basim  $ΑΒΜ$ ,  $ΑΜΒ$  simul sunt æquales quinque trientibus, per  $XXIII$  primi. Itaque alteruter eorum habet rationem duplam sesquialteram ad reliquum ad verticem  $Α$ . Ergo triangulum  $ΜΒΑ$  est triangulum Hexagoni ad peripheriam. Est autem recta  $ΗΑ$  rectæ  $ΗΒ$  æqualis, id est ipsi  $ΒΜ$ , ex constructione. Quare centro  $Η$ , interuallo  $ΗΑ$ , aut  $ΗΒ$ , descripto circulo, erit  $ΒΜ$  latus Hexagoni eodem circulo inscripti. ut propterea triangulum  $ΗΒΜ$  sit triangulum Hexagoni ad centrum, & proinde æquilaterum, per  $XV$ . quarti, adiuuante etiam  $XX$ . tertij. Quod erat demonstrandum.

Figura  $ΑΒΚΙCΑ$ , quæ componitur ex tribus isoscelibus, & æquilatero incommensurabili, est æqualis duobus æquilateris  $ΗΒΜ$ . Nam circulus est æqualis  $XLII$  isoscelibus,  $VI$  æquilateris,  $XII$  segmentis Dodecagoni. Rursus idem est æqualis  $XXIII$  isoscelibus, (Nam iuncta  $IM$ , erit triangulum  $ΑΜΙ$  æquale triangulo  $ΑΗΙ$ . Ita in Scalpro  $ΑΒC$  erunt  $IIII$  isosceles, duo  $ΒΗΜ$ )  $XII$   $ΒΜΜ$ ,  $XII$  segmentis Dodecagoni. Ablatis utrinque duodecim segmentis dodecagoni, & viginti quatuor isoscelibus, remanent  $XII$   $ΗΒΜ$  æqualia  $XVIII$  isoscelibus, & sex æquilateris  $ΗΚΙ$ . Ergo  $III$  isosceles cum uno  $ΗΚΙ$  sunt æqualia duobus  $ΒΗΜ$ .



Quibus positis, rursus patet Dodecagoni isosceles  $ΑΒΜ$  ad centrum, esse æquale duobus  $ΒΗΜ$ , & uni  $ΗΚΜ$ . Nam tria isosceles cum uno æquilatero  $ΗΚΙ$  valent duobus æquilateris  $ΗΒΜ$  ut iam diximus. Ergo figura  $ΑΒΗΚΙCΑ$  constans ex tribus isoscelibus, & æquilatero est æqualis duobus æquilateris  $ΗΒΜ$ . Quod & iam ostensum est. Quare dimidia figura  $ΑΒΗΚΑ$  valebit uno æquilatero  $ΗΒΜ$ : & consequenter isosceles Dodecagoni ad centrum  $ΑΒΜ$  est æquale duobus  $ΗΒΜ$ , & uni isosceli  $ΗΚΜ$ .

Si igitur interuallo  $ΗΒ$ , describantur duo circuli æquales, triangulum Hexagoni unius, nempe triangulum  $ΗΒΜ$ . & duo triangula dodecagoni alterius  $ΒΗΚ$ ,  $ΒΚΜ$ , sunt æqualia triangulo  $ΑΒΜ$  dodecagoni circulo  $ΓΡΟΒΜ$  inscripti. & proinde totum dodecagonum circulo  $ΓΡΟΒΜ$  inscriptum erit æquale Hexagono unius, & dodecagono alterius simul sumptis.

ΠΡΟ-

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ. Θώρημα.

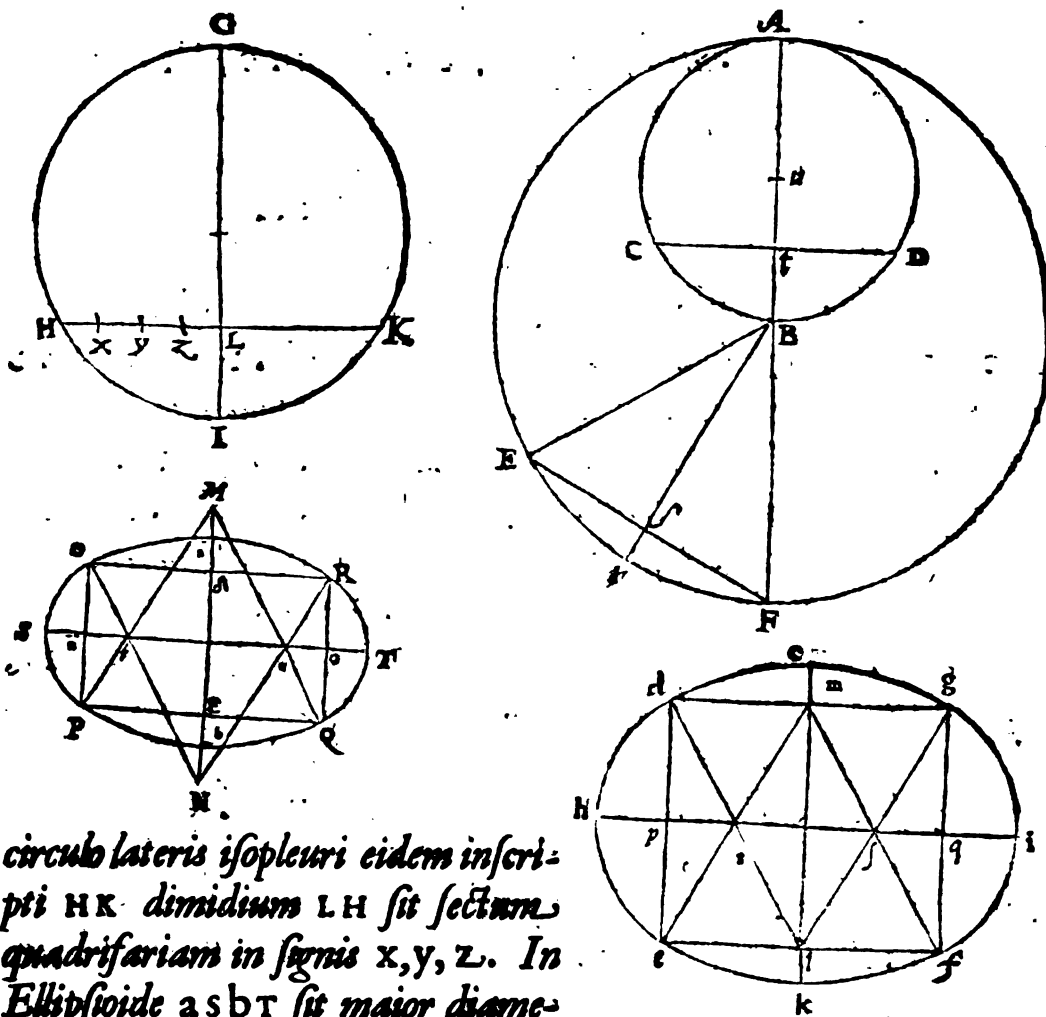
Τὰ Ἐλλήψιοειδῶν χωρία ἐσδέχε<sup>σθαι</sup> τῶν μὲν κύκλων εἶναι μείζων τῶν τὰ δὲ τῶν διαμέτρων τετραγώνων τοῖς ὑπὸ τῶν ἀμφοτέρων διαμέτρων τῶν Ἐλλήψιοειδῶν περιχορδοῖς ὀρθογωνίαις ἴσα ἔχοντων, τὰς δὲ περιμέτρους μείζους ἔχειν τῶν περιμέτρων τῶν κύκλων τῶν τὰ ἀπ' ἀρχῆς χωρία Ἐλλήψιοειδῶν δυναμῶν.

## PROPOSITIO XVIII Theorema.

Potest fieri, vt Ellipsoideon spatia sint maiora eis circulis, a quorum diametris quadrata æqualia sunt reſtangulis ſub vtraque Ellipsoideon diametro contentis, perimetri autem eorum ſint maiores perimetriseorum circulorum, qui poſſint ellipſioidea, quæ a principio.

*In circulo AEF, cuius diameter AF, centrum B, inſcriptum ſit triangulum Hexagoni BEF Circuli vero ACBD diameter AB ſit dimidia diametri AF: cuius centrum B. cui accommodatum ſit latius trigoni iſopleuri CD. Rurſus Ellipſoidis chki reſtangulum inſcriptum df habeat latus maius dg æquale diametro AB: minus autem latus dc æquale reſtæ CD. Ergo ex deſinit. III, ſegmentum dcg eſt æquale ſegmento EIF: & reſtæ mc reſtæ ſr: & ſegmentum dhe eſt æquale ſegmento CBD: & reſtæ ph, reſtæ tb: & ph, qi ſimul ſunt æquales toti ub: ac proinde tota hi toti uF æqualis. Jungantur reſtæ me, mf, item ld, lg. Reſtæ ml reſtæ de, hoc eſt reſtæ CD eſt æqualis. Quatuor eſt quadratum a reſtæ BA. hoc eſt BE, aut BF, talium trium eſt quadratum reſtæ CD. Sed quatuor eſt quadratum reſtæ BE, aut BF, talium trium eſt quadratum reſtæ BI, eo quod BE ſit latus trianguli iſopleuri BEF homologum lateri CD. Ergo per VII Axioma CD, BI ſunt æquales. & per primum Axioma, BI, ml ſunt æquales. Quadratum autem ld eſt æquale quadratis md, ml, hoc*

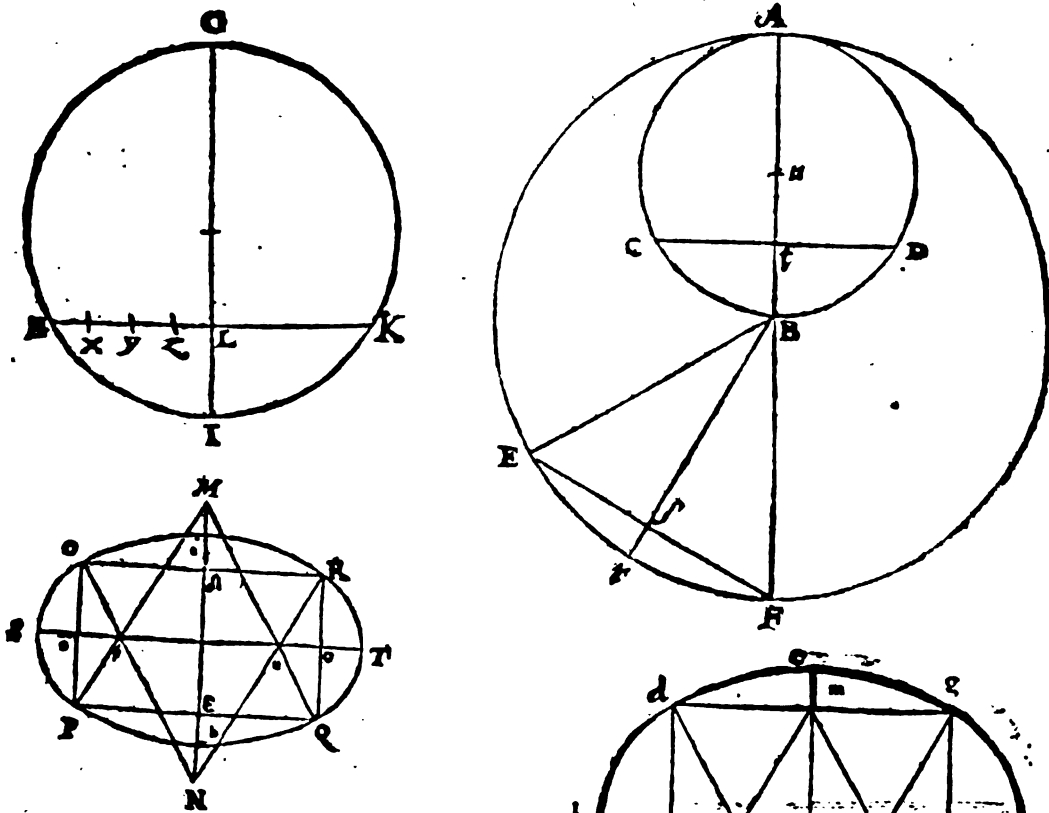
hoc est quadratis  $IE, IB$ . Sed quadratis  $IE, IB$  est aequale quadratum  $EB$ . Ergo  $EB, (hoc est dg,) dl$  sunt aequales: & triangulum  $dlg$  triangulo  $BEF$  aequale. Rursus circuli  $GHIK$  diameter  $GI$  sit talium XVI, qualium XII longitudo diametri  $AB$ . In quo



circulo lateris isopleuri eidem inscripti  $HK$  dimidium  $LH$  sit sectum quadrifariam in signis  $x, y, z$ . In Ellipsoide  $asbt$  sit maior diameter  $ST$  aequalis recta  $HK$ : minus autem latus orthogonij inscripti  $OR$  sit aequale recta  $CD$ , minus autem  $OP$  sit aequale recta  $UB$ , semidiametro circuli  $ACBD$ . Quae ratio est quadrati  $BA$  ad quadratum  $IG$ , eadem est lateris polygoni  $CD$  ad latus polygoni  $HK$ , per primam XII. per XXII autem sexti, ut longitudo  $BA$  ad longitudinem  $IG$ , ita longitudo  $CD$  ad longitudinem  $HK$ . Quomodo autem equalium  $BA$  erit sex, talium octo est longitudo  $IG$ : ita qualium sex erit  $CD$ , talium octo erit  $HK$ . Ablatis duabus octavis  $HK$ ,  
P
xy, reli-

$xy$ , reliqua  $yk$  erit aequalis recta  $CD$ : & propterea recta  $ns$ , vel  $OT$ , recta  $xh$ , vel  $xy$  est aequalis. Segmentum igitur  $OSP$  est segmentum trigoni isopleuri circulo inscripti, cuius circuli diameter est aequalis recta  $HL$ , dimidia scilicet ipsius  $HK$ , aut  $ST$ . Sunt triangula  $MPQ$ ,  $ONR$  super basibus  $OR$ ,  $PQ$  aequilatera. In quibus amborum differentia esto  $am$ ,  $bn$ , ut  $mc$ ,  $lk$  in triangulis  $mf$ ,  $kg$ . (quia tam haec, quam illa sunt equangula & inuicem & omnibus, & similia, similiterque sita.) Ablatis differentiis, remanebunt  $ab$ ,  $ml$  homologa. Sed  $ml$  est perpendicularis utriusque trianguli isopleuri. Ergo  $ab$  est perpendicularis utriusque trianguli  $NOR$ ,  $MPQ$ . ideo  $am$ ,  $bn$  homologa apotomis  $mc$ ,  $lk$ , erunt & ipsa apotoma aequales ipsis  $ad$ ,  $eb$ . Quare  $ab$  ipsi  $me$ , vel ipsi  $nd$  est aequalis, ac proinde utriusque trianguli cadet. Quia igitur quadratum  $CD$ , hoc est  $MP$ , aut  $MQ$ , est talium quatuor, qualium trium quadratum  $me$ , hoc est  $ab$ : qualium autem quatuor est quadratum eiusdem  $CD$ , talium trium est quadratum  $ca$ ; in circulo  $ACBD$ : erunt  $ca$ ,  $ab$  aequales, per  $IX$  quinti. Et propterea qualium  $XII$  ex hypothesis, est longitudo  $ba$ , talium  $ix$  est longitudo  $ca$ , vel  $ab$ . Iam qualium  $144$  est quadratum  $ld$ , siue  $lc$ , talium  $108$  est quadratum  $lm$ . Cuius latus est  $10 \frac{2}{11}$  fere. Atque adeo amba longitudo  $mc$ ,  $lk$  simul composita sunt  $3 \frac{1}{11}$  prope, nempe qualium  $XII$  est longitudo  $ld$ , aut  $lc$ . Est autem  $lm$  aequalis ipsi  $yk$ , ut iam demonstratum est. & qualium  $108$  est potentia  $lm$ , vel  $yk$ , talium  $192$  est potentia  $hk$ . Dimidia ergo longitudinis potentia  $lh$  talium erit  $48$ , & talium  $12$  potentia quarta partis  $yh$  vel  $yl$ . Cuius quarta partis latus est  $3 \frac{1}{7}$  fere: hoc est,  $3 \frac{2}{11}$ . Maior igitur est longitudo  $yh$ , quam ea, quae composita ex  $mc$ ,  $lk$ . Maior ergo tota  $hk$ , quam tota  $ck$ . Porro longitudo  $mc$  est ἀλογος, utpote ἀποτόμη, per  $LXXIII$  decimi, ac proinde longitudini  $mk$  incommensurabilis, per  $IIII$  definitionem decimi. atque adeo  $mk$  tam ipsi  $mc$ , quam toti  $ck$  longitudine & potentia erit incommensurabilis, per  $XVII$  eiusdem. Sed  $hk$ ,  $mk$  sunt potentia commensurabiles. Ergo  $hk$  toti  $ck$  incommensurabilis.

incommensurabilis, per XVII eiusdem. Sed HK, mk sunt potentia commensurabiles. Ergo HK toti ck incommensurabilis per XIII eiusdem. Qualem igitur fere  $13\frac{21}{27}$  est longitudo HK, talium  $13\frac{21}{27}$  fere est longitudo ck. His ita & constructis & demonstratis, ostendendum est, spatium quidem contentum Ellipsoide esse maius circulo, cuius a diametro quadratum est aequale rectangulo sub am-



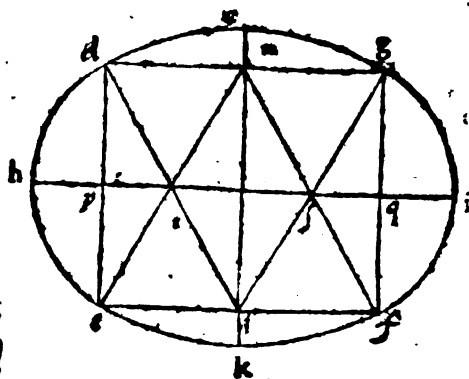
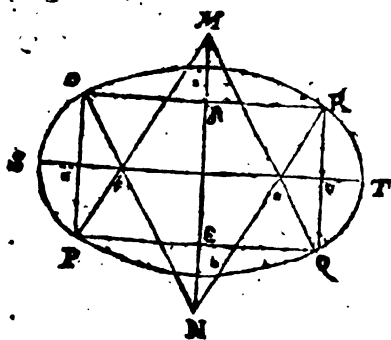
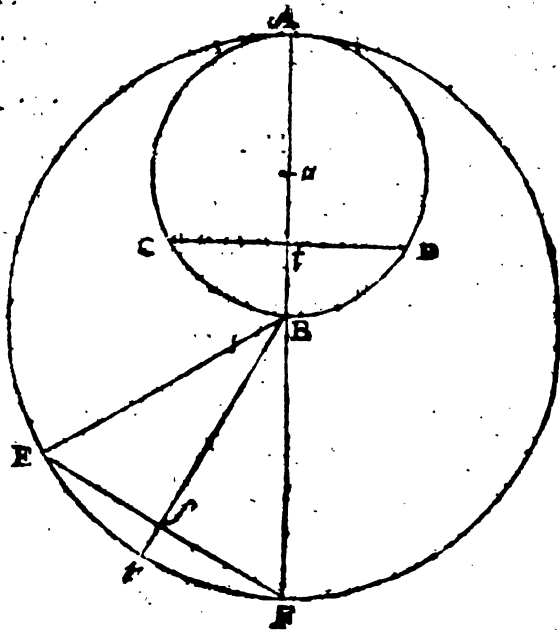
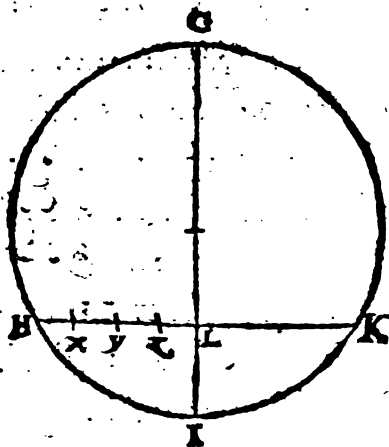
babus diametris Ellipsoidis cōtento. circuli vero, qui poterit spatium Ellipsoidis, perimetrū esse minorem perimetro Ellipsoidis. Segmenta dhe,

d cg, hoc est segmenta CBD, EIF sunt commensurabilia: quod nimirum circuli ACBD, AEF sunt commensurabiles, utpote cum a diametris quadrata sint commensurabilia ex constructione. Circulus verò AEF circuli ACBD est quadruplus. Ergo segmentum EIF segmenti similis, similiterque positi in circulo ACBD erit quadruplum, per XV quinti. Segmentum autem CBD, hoc est dhe,

potest septem segmenta similia segmento  $EF$ , vel  $d c g$ . Ergo segmentum  $d c g$  potest talia quatuor segmenta, qualia septem potest  $d h e$ : ita ut quatuor segmenta simul  $d c g, e k f, d h e, g i f$ , possint  $XXII$  segmenta hexagoni circulo  $ACBD$  inscripti. Jam lateris  $CD$  quadratum ad quadratum lateris  $EF$  rationem habere demonstratum est, quam tria ad quatuor. & propterea triangulum aequilaterum super basi  $CD$  constitutum ad triangulum  $BEF$ , id est  $m e f$ , rationem habet, quam tria ad quatuor. Ideo hexagonum (quod semper est aequale duobus Trigonis isopleuris) circulo  $ACBD$  inscriptum, ad duo talia triangula, quale triangulum  $m e f$ , id est ad totum rectangulum  $d f$ , rationem habet, quam tria ad quatuor: vel quam 30 ad 40. Sed hexagonum circulo  $ACBD$  inscriptum est talium 30 segmentorum, qualium 22 sunt segmenta  $d c g, e k f, d h e, g i f$ . Ergo totum rectangulum  $d f$  talium 40 segmentorum erit. atque adeo totum spatium  $chki$  erit 62 segmentorum, qualium 36 est circulus  $ACBD$ : aut qualium 144 est circulus  $A E F$ . Commensurabile igitur erit spatium  $chki$  alterutri circulo  $ACBD, A E F$ . Quare per primam XII, oportet diametrum circuli, qui circulus poterit talia 62 segmenta, diametris  $AB, A F$  esse commensurabilem, saltem potentia. Porro ratio quadrati a diametro  $AB$  ad rationem quadrati a diametro  $GI$ , hoc est ratio 144 ad 256, est ut 36 ad 64. Sed in circulo  $ACBD$  sunt 36 segmenta hexagoni, qualia sunt 62 in spatio  $chki$ . Ergo in circulo  $GHIK$  talia sunt 64. Quod si 64 segmentis competunt 256 a diametro, ergo 62 segmentis competent 248 a diametro circuli, qui circulus poterit 62 segmenta, id est spatium  $chki$ . Spatium vero 248 præter comprehenditur sub duabus longitudine commensurabilibus  $18, 13 \frac{1}{2}$ . Atque rectangulum sub  $ck, hi$ , id est, sub longitudinibus  $18, 13 \frac{1}{2}$  minus est, quam 246, utique medium & irrationale, utpote sub duabus potentia tantum commensurabilibus, & minoribus quam  $18, 13 \frac{1}{2}$  contentum. Ergo & quadratum a diametro circuli, qui poterit spatium  $chki$ , est minus rectangulo sub  $ck, hi$  concepto. Quod & experiandum & demonstrandum in Ellipsoide minore

OSPQIR.

OSPQR. Circuli, cuius segmentum isopleuri in eo inscripti est  
 aequale segmento OSP, diameter est aequalis recta LH, ut iam de-  
 monstratum est. Circuli autem semidiameter, cui circulo inscripti  
 hexagoni segmentum est RAQ, est aequalis recta OR, id est recta  
 YK. Sed quadratum dupla YK ad quadratum HY est, ut 432 ad



48, hoc est nonuplum. Talium igitur  
 9 est segmentum OR, quatuor  
 OSP est 7. Ergo quatuor segmen-  
 ta OR, PBQ, OSP, RTQ simul  
 sunt aequalia 32 segmentis, qualia 36 sunt in circulo, cuius circuli  
 diameter est aequalis recta HL. Iam vero rectangulum OQ ad  
 hexagonum circulo ABD inscriptum est, ut duo ad tria, cum hexa-  
 gonum circulo ACBD inscriptum sit aequale rectangulo sub CD, LA,  
 siue sub OR, LA. Ergo per primam sexti, hexagonum circulo ACBD  
 inscriptum est ad rectangulum OQ, ut LA, OP, hoc est, ut 9 est 6,

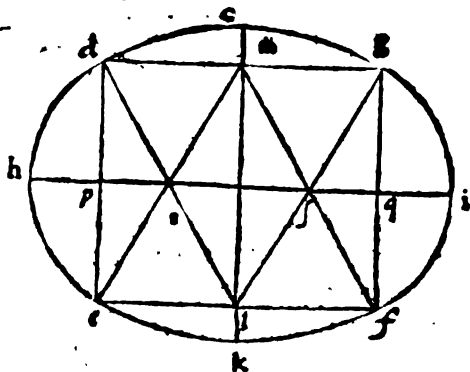
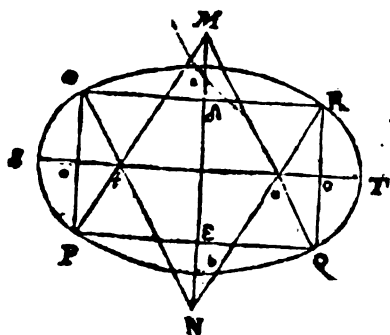
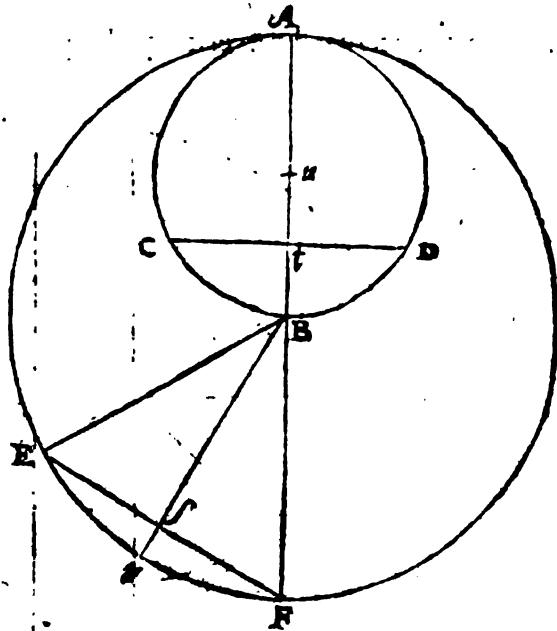
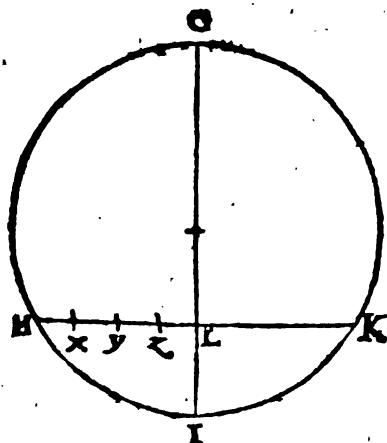
P 3 vel 3,



vel 3, & 2. Quatuor igitur segmentorum 20 est Hexagonum, circula ACBD inscriptum, talium 20, est rectangulum OQ. Sed Hexagonum, vel Hexagoni pars segmentum, est homologum quadrato a diametro circuli sui. hoc est, erit ut quadratum diametri AB, ad quadratum HL, ita segmentum Hexagoni circulo ACBD ad segmentum hexagoni Circulo HL inscripti:  $\text{ἔστιν ὡς ἀνάλογον}$ , per primam XII. Erit igitur ut 144 ad 48, ac propterea triplum. Ergo 20 segmenta rectanguli OQ sunt aequalia 60 segmentis hexagoni circulo HL inscripti. & proinde unum ex 60 talibus segmentis est aequale uni ex 7 segmentis Hexagoni in segmento OSP, aut 9 in segmento OAR contentis. Ergo totum spatium a s b t est aequale 92 segmentis hexagoni, qualibus 36 est aequalis circulus, cuius diameter est LH. Iam ratio 36 ad 92 est ut 9 ad 23. Quod si a 9 est quadratum diametri 48, ergo a 23 erit quadratum diametri 122  $\frac{1}{3}$ , utique  $\text{πρῶτον}$ , utpote quadratum diametri eius circuli, qui circulus poterit 92 segmenta, nempe circuli, qui poterit spatium a s b t. Sed longitudo s t est 13  $\frac{21}{27}$  fere, qualium novem est longitudo a b. Rectangulum ergo sub 13  $\frac{21}{27}$  fere longitudine s t,  $\text{ἔστιν 19}$  precise longitudine a b (quae ambo sunt tantum potentia commensurabiles) erit medium  $\text{ἡμί ἀδύσῳν}$  per XXII decimi, & maius quam 224. Erit ergo maius quadrato diametri eius circuli, qui poterit spatium a s b t: ut in maiore Ellipsoide. Quod est prius.

Ostendamus circuli, qui poterit spatium Ellipsoidis, perimetrum minorem fore perimetro Ellipsoidis, puta perimetro cdhe k fi maioris, Ellipsoidis. Diameter AB est talium trium, qualium quatuor est GI, & qualium 6 est AF, tam ex hypothesis, quam ex constructione. Ergo quadrata ab eorum tam diametris, quam perimetris sunt inter sese, ut 9, 16, 36. & quidem CD est nona pars quadrati a perimetro ACBD, & EF trigesima sexta quadrati a perimetro AEF. Ergo aequales sunt peripheris CBD, EIF utique alterutra aequalis uni sextadecima quadrati a peripheria GHIK hoc est quadranti peripheria GHIK. Ergo tota perimetris cdhe k fi, est aequalis perimetro GHIK: cuius diameter GI ostensa est maior diametro

diametro circuli eius, qui poterit spatium  $chki$ . Idem & ostendimus in minori Ellipsoide. Diametrus circuli, cuius Hexagoni segmentum est  $o a r$ , potest  $432$ , ut dictum est. Ergo perimetrus

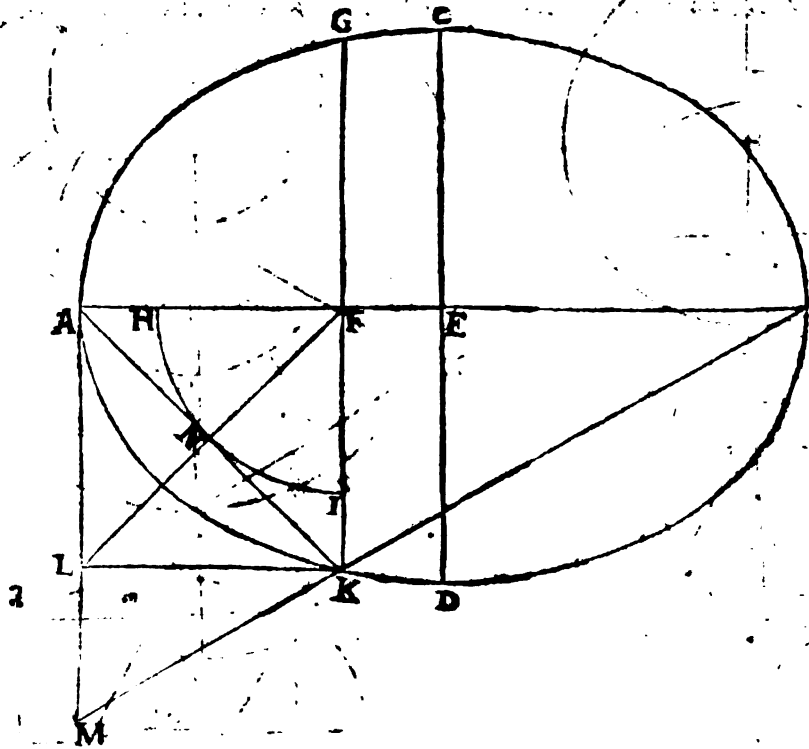


erit  $4320$ . tricesima sexta pars  $120$  potentia peripheria  $o a r$ . Cuius latus fere  $11$ . At diametrus alterius segmenti  $o s p$ ,  $48$ . perimetrus  $480$ .

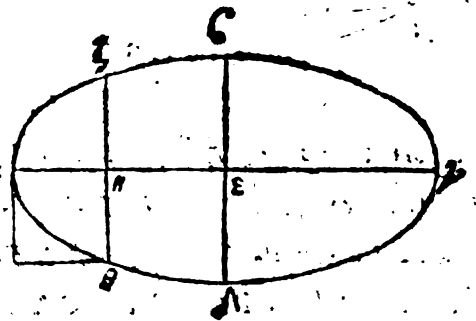
nona pars  $53 \frac{1}{3}$ , qua maior est, quam ut eius latus sit  $7$ . Ergo peripheria  $o s p$ , maior, quam  $7$ . & tota  $r a o s p$  maior, quam  $18$ . Proinde tota  $r a o s p b q t$  est plusquam longitudinis  $36$ . Ergo quadratum peripheria  $r a o s p b q t$  est plusquam  $1296$ : & proinde maius, quam  $1227$ . Quod erat posterius.

ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ.

Sit Ellipsoïdes  $A C B D$ , cuius maior diameter  $A B$ , minor  $C D$ . Fiat ut  $A B$  ad  $C D$ , ita  $C D$  ad  $A M$ , quæ in puncto  $A$  coniuncta sit ipsi  $A B$  perpendicularis. Iungantur rectæ  $M B$ , &  $K L$  ipsi  $A F$ , &  $K F$  ipsi  $M A$  parallela, quæ quidem producta in ambitum Ellipsoïdis secabit eum in puncto  $G$ . Itaque recta  $G K$  erit quidem una perpetua linea,  $F K$  autem ipsi  $F G$  erit æqualis, propterea quod diameter  $A B$  scindit Ellip-



soïdes totum bifariam. In parallelogrammo  $A F K L$  diametri  $A K$ ,  $F L$  secant sese in puncto  $N$ . Centro  $N$ , intervallo  $F N$ , describatur peripheria  $I N H$ . Angulus  $K N I$ , quam Græci vocant *μεσότης ἡ γωνία*, est minor omni angulo rectilineo. Igitur recta  $K A$  tangit peripheriam circuli  $I N H$ , in puncto  $N$ , per  $XVI$  *τετῆς*. Quare per Coroll. eiusdem, recta  $K A$  est ad angulos rectos ipsi  $F N$ . Et per definitionem  $X$  primi, adiuuante  $XIII$  eiusdem, omnes anguli ad  $N$  sunt recti. Cum igitur quadrilaterum  $A K$  sit parallelogrammum, diametri  $A K$ ,  $L F$  diuidunt sese bifariam in centro  $N$ . Itaque cum latera  $N A$ ,  $N F$  trianguli  $N A F$ , sint æqualia lateribus  $N F$ ,  $N K$  trianguli  $N F K$ , & anguli æqualibus lateribus contenti æquales, basis igitur  $F A$  basi  $F K$  erit æqualis: & propterea rectangulum  $A K$  est quadratum. Sed quadratum  $F G$  est æquale quadrato  $A K$ . Igitur recta  $F G$  ordinatim ad diametrum applicata est æqualis orthogonio  $A K$ . Id autem cum accadat omni *μεσότητι γωνίᾳ*, accadat etiam τῇ *μεσότητι γωνίᾳ*: propterea Serenus Antiffensis in propositionibus  $XVI$ ,  $XVII$  prioris libri sui



fui concludit τὴν κυλινδρικὴν ὀμὴν εἶναι ἑλλειψιν. Ergo Ellipsoides ACBD erit vera Ellipsis, si quidem illi idem accidit, quod Ellipsi: ut & Ellipsoides αβγδ, in quo rectæ κζ ordinatim applicatæ quadratum est æquale orthogonio αθ, quod & ipsum demonstrare possumus esse quadratum. Si igitur necessario sequitur, secundum Serenum, Ellipsoides esse veram Ellipsim, quia illi eadem accidunt, quæ & Ellipsi: ergo per antecedentem, non minus peccatum est ab Archimede in potentia Ellipseos, quam in circulo. Demonstratum enim est a nobis, potentiam omnis Ellipsoidis esse paullo maiorem potentia circuli, cuius circuli diameter sit æqualis potentiaæ rectanguli sub utraque Ellipseos diametro, contra quam ipse olim persuadere conatur τῆς οἰς τὸ ἀδωάτον ἀπαγωγῆς vsus. Non dubium enim est, quin minute Ellipsim secuerit, ut & circulum secuerat, post Antiphontem.

Porro esto ἀπορον: Circa duas inæquales diametros datas ἑλλειψιν, vel ἑλλειψιοειδῆς describere, si quidem idem sunt: aut utrunque, si diuersa.

In maiore Ellipsoide ACBD facta est a nobis ut BA ad CD, ita CD ad AM: quod hæc sit constructio eorum, qui hæc conica tractant, Apollonij, Sereni, & Pappi, ut demonstretur rectam ordinatim applicatam esse æqualem orthogonio: non autem hoc fecimus, quod nostræ demonstrationi inferuisset.

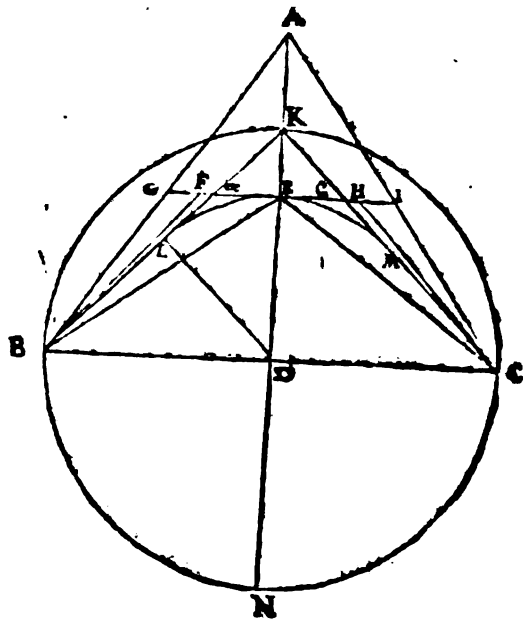
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ. Πρόβλημα.

Παραβολὴν Ἐπιπέδου ἔχεισθαι λόγον Ἐπιπέδου ἐλάσσονα πρὸς τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν αὐτὴν τῇ παραβολῇ ἐν ὑψοῦ ἴσῳ.

PROPOSITIO XIX. Problema.

Parabolen ostendere, quæ ad Triangulum in eadem basi eademque altitudine cum Parabole constitutum rationem habeat sesquitertia minorem.

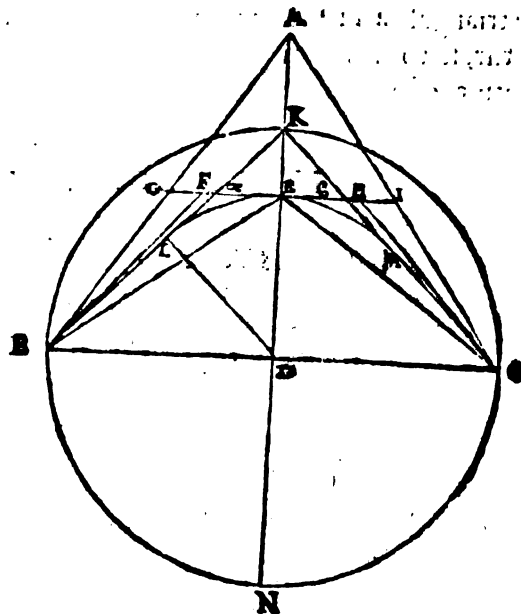
Estο Coni KBC basis circuli KBNC sectus normaliter diametro KN, BC. Quia rectæ KB, KC sunt latera quadrati circulo inscripti, & angulus A rectus, Conus KBC erit orthogonius, per definitionem XVIII Elementi XI. Secto latere KB bisariam in L, & iuncta DL,



erit

erit angulus DLK rectus, per tertiam tertij. Angulus quoque K est rectus. Ergo recta DL, CK sunt parallela, per XXVIII primi. Ideo conus KBC sectus per DL faciet parabolam. Faciat parabolam BLEMC, abscissa scilicet recta DE, qua sit equalis ipsi DL, & ideo sit altitudo parabole, cuius basis est equalis diametro basis conica, & idcirco maxima omnium basium parabolicarum in sectione (coni orthogonij, & tota triangulo KBC inscripta, hoc est non secta a triangulo KBC, quod quidem triangulum sit plano conum per verticem & axem secante, per III primi Conicorum Apollonij. Inscribebatur triangulum EBC in eadem parabola. Ostendamus parabolam BLEMC ad triangulum inscriptum (hoc est ad triangulum in eadem basi & altitudine) habere rationem minorem sesquitertia. Cum recta DE componatur recta EA equalis eidem DE: & iunctis AC, AB, a puncto E agatur recta GI parallela recta BC, per XXXI primi, coniungens latera AC, AB, trianguli ABC, in punctis G, I. Anguli IEA, CDA, aut IED, CDE erunt aequales, nempe recti, per XXVIII, aut XXIX primi. Et propterea per IIII primi, Triangulorum AEG, AEI bases AG, AI sunt aequales: & triangula ADC, AEI, aut ADB, AEG sunt equangula. Ideo per IIII sexti, erit ut AD ad DB, ita AE ad EG: & ἡ ἀλλὰ, ut AD ad AE, ita DB ad EG. Sed AD est dupla recta AE. Ergo DB est dupla ipsius EG. Igitur totum triangulum AGI, & triangulum EBD sub aequalibus altitudinibus EA, ED constituta, sunt inter se, ut bases GI, DB, hoc est aequalia, per primam sexti. Rursus triangula EBD, EGB inter duas parallelas GE, BD sunt sub eadem altitudine, per definit. IIII sexti. Quare per primam eiusdem, Triangula GEB, BDE, sunt inter se, ut bases GE, BD. Quapropter Triangulum GEB Trianguli BED est dimidium: & duo simul Triangula GEB, IEC Triangulo EBD, aut EDC, aut AGI sunt aequalia. Unde totum Triangulum ABC in quatuor triangula aequalia resolvitur. Et in genere omne Triangulum isosceles resolvitur in quatuor triangula aequalia, sectis omnibus lateribus bifariam: in novem, sectis trifariam; in sexdecim, sectis quadrifariam; & ita deinceps per numeros quadratos. Erit igitur Triangulum ABC  
Trian-

Trianguli EBC duplum, & Trapezij GICB sesquiertium. Ablata FG tertia parte totius EG, & HI totius EI, per IX sexti, & iunctis FB, HG, quia FG pars est ipsius EG, & HI ipsius EI, triangula GFB, IHC erunt remotiora a parabole BLEMC, quam Triangulum KBC, quod circumscribit parabolam, & non secat eam. Ergo GFB, IHG multo minus secabunt parabolam, sed ab ea separata erunt. Triangula porro GFB, GEB sub eadem altitudine DE constituta sunt inter se, ut bases GF, GE. Erit ergo Triangulum GEB trianguli GFB, item Triangulum EIG trianguli HIC triplum. Qualem igitur Triangulum FEB est duum, talium unius erit Triangulum GFB & HIC: & qualium duodecim sunt triangula duo simul EDC, EDB, talium sexdecim erit Trapezium FHCB. Ergo ratio Trapezij FHCB ad triangulum isosceles EBC eandem altitudinem & basim cum parabole BLEMC habens, est sesquiertia. Sed parabole BLEMC est minor Trapezio FHCB. Ratio igitur paraboles BLEMC ad triangulum BEC eandem basim & altitudinem cum parabole habens, est minor sesquiertia, per priorem partem VIII quinti. Quod erat faciendum.



Σ Χ Ο Λ Ι Ο Ν.

Ergo aut non omnes Parabolæ, aut nullæ habent rationem sesquiertiam ad triangulum eandem basim & altitudinem cum ipsa Parabolæ habens. Atqui Archimedes libro *τῆς πρῶτης* *ἐπιπέδων* *καταβολῆς* demonstrat parabolam omnem esse sesquiertiam trianguli sibi inscripti: quam demonstrationem multis epichiremasin Mechanicis muniuit. Sane mirum est tam egregium opus hac vnica propositione nostra oppugnari. neque quomodo Archimedes tantum virum defendam, video. Quinetiam Parabolæ, qua vtitur idem Archimedes, eodem modo potest oppugnari. Quod

Quod satis mirari non possum. Infinitas alias parabolas adducere possumus, ita ut habeant ad suum triangulum rationem sesquitertia minorem. Sed idem fecit in Parabola Archimedes, quod in circulo, cylindro, Ellipsi. Prius enim per *παραβολήν* emensus est. Deinde rationem conatus est reddere, *καὶ τὰ ἀνεκτίθηται*, ut solet, *ἀποδείξει*. Si non Geometriam, sed oculos in consilium adhibeamus, quis prima fronte, nulla demonstratione praecunte, non videt, figuram B L E B esse minorem tertia parte trianguli B E D? Ne autem vllum dubium in figura paraboles B L E M C relinquatur, scito nos eam parabolam ad sectionem Coni materialis, quam proxime fieri potuit, efformasse.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΔΤΝΑΜΙΚΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

